Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **42 (1987)**

Heft 4

PDF erstellt am: **28.04.2024**

LITERATURVERZEICHNIS

1 M. Abramowitz, I. A. Stegun: Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. Dover Publications, Inc., New York (1968), Seite 591 (Formel) und Seite 608 (Tabelle).
2 H. Durège: Theorie der elliptischen Funktionen. Leipzig 1887, Seite 193.
3 C. G. J. Jacobi: Gesammelte Werke. Königlich-Preussische Akademie der Wissenschaften Berlin, Verlag G. Reiner, *1* (1881), Seite 81.

 0013-6018/87/040093-12$1.50+0.20/0

Kleine Mitteilungen

A supplement to Eddy's paper

In El. Math., Vol. 41/5, was published the following inequality for a triangle ABC

$$\sum n_a \leq 14R - 19r, \tag{*}$$

where n_a, n_b, n_c are the Nagel cevians, R is the circumradius and r the inradius of the given triangle.
The following inequality

$$\sum n_a \leq 10R - 11r \tag{1}$$

is more precise than the nequality (*).

Proof. Let IN_a denote the join of the incenter I and the point of contact N_a of the corresponding excircle with side BC of a given triangle ABC (similar for IN_b and IN_c). Applying the formulas $\sum a^2 = 2(s^2 - 4Rr - r^2)$ and $\sum bc = r^2 + s^2 + 4Rr$, where s represents the semiperimeter of ABC, to the inequality

$$\sum IN_a \leq \sqrt{6\sum a^2 - 6\sum bc + 9r^2}$$

in [2], we obtain

$$\sum IN_a \leq \sqrt{6s^2 - 72Rr - 9r^2}\,. \tag{2}$$

Then, since ([1], p. 50)

$$s^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2,$$

(2) implies

$$\sum IN_a \leq \sqrt{24R^2 - 48Rr + 9r^2}\,. \tag{3}$$

The inequality $\sqrt{24R^2 - 48Rr + 9r^2} \leq 8R - 13r$ is equivalent to $2r \leq R$ in [1]. On the basis of this conclusion, from (3) we get

$$\sum IN_a \leq 8R - 13r\,. \tag{4}$$

Therefore, starting with the inequalities ([2], p. 129; [1], p. 103)

$$\sum n_a \leq \sum AI + \sum IN_a \quad \text{and} \quad \sum AI \leq 2(R+r)\,,$$

we conclude that (1) holds. Equality in (1) occurs only if the triangle is equilateral.

D. M. Milošević, Pranjani, YU

REFERENCES

1 O. Bottema, R. Ž. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović, P. M. Vasić: Geometric Inequalities. Wolters-Noordhoff, Groningen 1969.
2 R. H. Eddy: An upper bound for a sequence of cevian inequalities. El. Math. *41*, 128–130 (1986).

 0013-6018/87/040104-02$1.50 + 0.20/0

Werte zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel zweier Zahlen

In [1] wird für $b > a > 0$ die folgende Ungleichung bewiesen

$$(\sqrt{a\,b})^{b-a} < \left(\frac{e}{a}\right)^a \left(\frac{b}{e}\right)^b < \left(\frac{a+b}{2}\right)^{b-a}. \tag{1}$$

Definiert man für $a > 0$ und $b > 0$

$$M_r(a, b) = \begin{cases} \left(\dfrac{a^r + b^r}{2}\right)^{1/r} & \text{falls } r \neq 0 \\ \sqrt{a\,b} & \text{falls } r = 0 \end{cases}$$

sowie

$$L(a, b) = \begin{cases} \dfrac{b-a}{\log b - \log a} & \text{falls } a \neq b \\ a & \text{falls } a = b \end{cases}$$

so gilt für $a \neq b$ [2]

$$M_0(a, b) < L(a, b) < M_{1/2}(a, b)\,. \tag{2}$$

Eine Verschärfung von (2) findet sich in [3]. In dieser Note wird eine Ungleichung vorgestellt, die (1) und (2) als Spezialfälle enthält. Überdies werden sich einige interessante neue Ungleichungen ergeben.
Fortan sei $a > 0, b > 0$ und $a \neq b$ vorausgesetzt.

Satz: Ist die Funktion $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und positiv und die Funktion $g: \left[\sqrt{a\,b}, \frac{a+b}{2}\right] \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, so gilt

$$g(\sqrt{ab}) < \frac{\int_a^b f(t)\, g(h(t))\, dt}{\int_a^b f(t)\, dt} < g\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

wobei $h(t) = \sqrt{t(a+b-t)}$ sei.

Beweis: Durch Anwenden der geometrisch-arithmetischen Ungleichung und wegen

$$h(t) = \sqrt{a\,b + (t-a)(b-t)}$$

erhält man

$$\sqrt{a\,b} < h(t) < \frac{a+b}{2}$$

für alle $t \in (a, b)$, $t \neq \frac{a+b}{2}$. Wendet man darauf die Funktion g an und multipliziert die entstehende Ungleichung mit $f(t)$, so folgt die behauptete Ungleichung durch anschließende Integration. Q.E.D.

1. Beispiel: Wählt man $f(t) = 1$ und $g(x) = \log x$, so liefert der Satz die logarithmierte Form von (1).

2. Beispiel: Für $c > 0$, $d > 0$ und $c \neq d$ sei $a = \sqrt{c}$, $b = \sqrt{d}$, $f(t) = t^{-1}$ und $g(x) = x^2$. Hier erhält man

$$M_0(c, d) < L(c, d) < M_{1/2}(c, d)$$

also gerade die Ungleichung (2).

3. Beispiel: Mit $f(t) = t^{-1}$ und $g(x) = x^4$ liefert der Satz die Ungleichung

$$(a\,b)^2 < \frac{(b^2 - a^2)(a^2 + 4\,a\,b + b^2)}{12(\log b - \log a)} < \left(\frac{a+b}{2}\right)^4. \tag{3}$$

Die rechte Seite von (3) läßt sich wegen

$$2\,a\,b < \frac{b^2 - a^2}{\log b - \log a}$$

abschwächen zu

$$\frac{b^4 - a^4}{12(\log b - \log a)} + \frac{2}{3}(a\,b)^2 < \left(\frac{a+b}{2}\right)^4.$$

Setzt man hierin $c = a^4$ und $d = b^4$, so bekommt man die Ungleichung

$$L(c, d) < 3\,M_{1/4}(c, d) - 2\,M_0(c, d). \tag{4}$$

Eine elementare Rechnung zeigt, dass die beiden folgenden Ungleichungen äquivalent sind

$$(5 - \sqrt{24})^4 \le \frac{c}{d} \le (5 + \sqrt{24})^4 \tag{*}$$

$$3\,M_{1/4}(c, d) - 2\,M_0(c, d) \ge M_{1/2}(c, d).$$

Dies zeigt, daß (4) bei Bestehen von (*) schwächer ist als die rechte Seite von (2). In allen anderen Fällen ist (4) jedoch schärfer.

4. Beispiel: Für $f(t) = (t(a + b - t))^{-1/2}$ und $g(x) = x$ liefert der Satz die folgende Ungleichung

$$\frac{2}{a+b} < \frac{2}{b-a}\arcsin\frac{b-a}{b+a} < \frac{1}{\sqrt{a\,b}}.$$

Das Auffinden weiterer Ungleichungen mit Hilfe des obigen Satzes sei dem interessierten Leser überlassen.

H.-J. Seiffert, Berlin, BRD

LITERATURVERZEICHNIS

1 H. Alzer: Über einen Wert, der zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel zweier Zahlen liegt. El. Math. *40,* 22–24 (1985).
2 B. C. Carlson: The logarithmic mean. Am. Math. Monthly *79,* 615–618 (1972).
3 T. P. Lin: The power mean and the logarithmic mean. Am. Math. Monthly *81,* 879–883 (1974).

 0013-6018/87/040105-03$1.50+0.20/0

The inscribed simplex in a centrally symmetric convex body in E^n

I. M. Yaglom and V. G. Boltyanskii in their beautiful book, see [1], prove that a general triangle cannot be contained in a centrally symmetric convex figure whose area is less than twice that of the triangle. Fary and Redei generalize in [3] the above result for a simplex p inscribed in a centrally symmetric convex body F in E^n. In the present note, using an elegant theorem of G. D. Chakerian, see [2], we obtain a short proof for the inequality

$$|F| \ge n\,|p|$$

where by $|K|$ we denote the volume of the convex body K. Fary and Redei's result is:

$$|F| \geq \binom{n}{n/2} |p| \quad \text{if } n \text{ is even}$$

$$|F| \geq \binom{n}{(n-1)/2} |p| \quad \text{if } n \text{ is odd}.$$

Our result is the best possible only for the case $n = 2, 3$.

Theorem. Let F be a centrally symmetric convex body in E^n and $p = A_1 A_2 \ldots A_{n+1}$ an inscribed simplex. Then it follows that:

$$|F| \geq n |p|.$$

Proof. Let 0 be the center of F and A_i' the centrally symmetric of the point A_i. We denote by p' the simplex $A_1' A_2' \ldots A_{n+1}'$, and by P the n-simplex circumscribed to F with its facets parallel to those of p. It is not difficult to prove that:

$$|P| \geq n^n |p'| = n^n |p|. \tag{1}$$

Indeed, we consider the parallel plane from each vertex A_i' to the opposite facet. These planes, intersecting each other, form a n-simplex P_1 with its facets parallel to the facets of P. The points A_i' are the centroids of the facets of P_1 and obviously P_1 is included in P. Therefore

$$|P| \geq |P_1| = n^n |p'| = n^n |p|.$$

Now using Chakerian's theorem, see [2], we will have:

$$|F|^n \geq |P| \, |p|^{n-1},$$

and from (1)

$$|F|^n \geq n^n |p|^n$$

or,

$$|F| \geq n |p|.$$

George A. Tsintsifas, Thessaloniki, Greece

REFERENCES

1 I. M. Yaglom, V. G. Boltyanskii: Holt, Renehart and Winston, page 34.
2 G. D. Chakerian: Minimum Area of Circumscribed Polygons. El. Math. Vol. *28*, 5 (1973), 108–111.
3 I. Fary, L. Redei: Der zentralsymmetrische Kern und die zentralsymmetrische Hülle von konvexen Körpern. Math. Annalen *122*, 205–220 (1950).

 0013-6018/87/040107-02$1.50+0.20/0

The diophantine equation $(x^2-1)(y^2-1)=(z^2-1)^2$: a footnote

After my paper [1] had appeared, I noticed that the solution

$$(x, y, z) = (155, 48049, 2729)$$

given therein can be deduced from a result of Szymiczek's on triangular numbers in geometric progression, mentioned in [2].

A triangular number is an integer of the form $t_n = n(n+1)/2$, with n a positive integer. Szymiczek's result is that $t_{77}, t_{1364}, t_{24024}$ are in geometric progression, that is,

$$t_{77} \cdot t_{24024} = (t_{1364})^2 .$$

This can be written as

$$\{(2\cdot 77+1)^2-1\}\{(2\cdot 24024+1)^2-1\} = \{(2\cdot 1364+1)^2-1\}^2 ,$$
$$(155^2-1)(48049^2-1) = (2729^2-1)^2 .$$

Shoichi Hirose, Mita High School, Tokyo, Japan

REFERENCES

1 S. Hirose: On a diophantine equation $(x^2-1)(y^2-1)=(z^2-1)^2$. El. Math. *42*, 1–3 (1987).
2 D. A. Q.: Triangular square numbers: a postscript. Math. Gaz. *56*, 311–314 (1972).

0013-6018/87/040109-01$1.50+0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 944. Für $p > 1$ bestimme man

$$\sup\left\{-\int_0^1 f(x)\log x\,dx \;\middle|\; \int_0^1\left(x^{-1}\int_0^x |f(t)|\,dt\right)^p dx \le 1\right\} .$$

A. A. Jagers, Enschede, NL

Lösung: Ist f: $[0,1] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist die durch

$$F(x) := \begin{cases} |f(0)| & \text{für } x = 0 , \\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x |f(t)|\,dt & \text{für } 0 < x \le 1 \end{cases}$$