

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 42 (1987)
Heft: 3: Archimedes was right. Part one

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Aufgaben

Aufgabe 941. Prove that

$$-3\sqrt{3}/8 < \sin(B-C)\cos^3 A + \sin(C-A)\cos^3 B + \sin(A-B)\cos^3 C < 3\sqrt{3}/8$$

where A, B, C are the angles of a triangle.

M. S. Klamkin, Edmonton, CA

Lösung (Bearbeitung der Redaktion): Bezeichnen wir die abzuschätzende Summe mit $S(A, B, C)$, so folgt aus bekannten trigonometrischen Identitäten:

$$S(A, B, C) = -\sin(B-C)\sin(C-A)\sin(A-B).$$

O. B. d. A. sei $A > B > C$. Setzen wir nun

$$\alpha := B - C, \quad \beta := \pi + C - A, \quad \gamma := A - B,$$

so folgt $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, d. h. α, β, γ sind die Innenwinkel eines Dreiecks. Mithin ist nach einer bekannten Dreiecksungleichung

$$|S(A, B, C)| = \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq 3\sqrt{3}/8,$$

mit Gleichheit g. d. w. $\alpha = \beta = \gamma = \pi/3$, d. h. $A = 2\pi/3, B = \pi/3, C = 0$. In diesem Fall ist das ursprüngliche Dreieck ausgeartet.

G. Bercea, München, BRD

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), Kee-wai Lau (Hongkong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), P. Müller (Nürnberg, BRD), S. Nanba (Okayama, Japan), Hj. Stocker (Wädenswil), M. Vowe (Therwil).

Aufgabe 942. Es sei

$$S_{n,k} := \sum_{j=1}^{n^k} \frac{n^{k-1}}{n^k + j^k}, \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

Man ermittle $S_k := \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n,k}$ sowie $S := \lim_{k \rightarrow \infty} S_k$.

Bemerkung: Bekannt sind $S_1 = \ln 2$ and $S_2 = \pi/2$ (Putnam Competition 1961/3).

M. Vowe, Therwil

Solution: The sum $S_{n,k}$ can be written as

$$S_{n,k} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n^k} \frac{1}{1 + (j/n)^k},$$

a Riemann lower sum for the integral of $t \mapsto (1+t^k)^{-1}$ over $(0, n^{k-1})$. Since $n^{k-1} = 1$ for $k=1$ and $n^{k-1} \rightarrow \infty$ for $k > 1$ as $n \rightarrow \infty$, it follows that

$$S_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \ln 2$$

and

$$S_k = \int_0^\infty \frac{1}{1+t^k} dt = \frac{\pi}{k} \operatorname{csc} \left(\frac{\pi}{k} \right) \quad \text{for } k > 1.$$

Clearly $S_k \rightarrow 1$ as $k \rightarrow \infty$; or $S = 1$.

Remark: The value of S may be determined without having to know the actual value of S_k . For instance, by Lebesgue's dominated convergence theorem,

$$S = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \int_0^\infty \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1+t^k} \right\} dt = \int_0^1 1 dt = 1.$$

A. A. Jagers, Enschede, NL

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), Kee-wai Lau (Hongkong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), P. Müller (Nürnberg, BRD), S. Nanba (Okayama, Japan), S. Schwaiger (Graz, A), Hj. Stocker (Wädenswil), C. Wildhagen (Breda, NL), R. Wyss (Flumenthal).

Aufgabe 943. Das Produkt

$$\prod_{k=1}^{n-1} [\cos(2k\pi/n) - \cos(2\alpha)], \quad n \geq 2, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

ist geschlossen auszuwerten.

V. D. Mascioni, Origlio

Lösung: Mit $z := e^{i\alpha}$, $w := e^{i\pi/n}$ ist der typische Factor $\cos \frac{2k\pi}{n} - \cos 2\alpha$ des mit P_n bezeichneten Produkts der Aufgabenstellung gleich

$$-\frac{1}{2}(z^2 + z^{-2} - w^{2k} - w^{-2k}) = -\frac{1}{2}z^{-2}(z - w^k)(z - w^{2n-k})(z - w^{n-k})(z - w^{n+k}).$$

Hieraus folgt wegen $z^{2n} - 1 = \prod_{k=0}^{2n-1} (z - w^k)$

$$\begin{aligned} P_n &= (-2z^2)^{1-n} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{2n-1} (z - w^k)^2 = (-2z^2)^{1-n} \left(\frac{z^{2n-1}}{z^2 - 1} \right)^2 \\ &= (-2)^{1-n} \left(\frac{z^n - z^{-n}}{z - z^{-1}} \right)^2 = (-2)^{1-n} \left(\frac{\sin n\alpha}{\sin \alpha} \right)^2, \quad \alpha \not\equiv 0 \pmod{\pi}. \end{aligned}$$

Durch Grenzübergang $\alpha \rightarrow 0$ erkennt man, dass

$$P_n = (-2)^{1-n} \cdot n^2 \quad \text{falls} \quad \alpha \equiv 0 \pmod{\pi}.$$

P. Bundschuh, Köln, BRD

Bemerkung der Redaktion: O. P. Lossers und M. Vowe verweisen auf bekannte Verallgemeinerungen der Aufgabe, s. folgendes

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 G. Chrystal: Textbook of Algebra, vol. 2, 7th Edition, New York 1964, p. 356.
- 2 E. R. Hansen: A table of series and products, Prentice Hall, Formula 91.1.16., p. 497.

Weitere Lösungen sandten K. Dilcher (Halifax, CD), F. Götze (Jena, DDR), A. A. Jagers (Enschede, NL), L. Kuipers (Sierre), W. Janous (Innsbruck, A), Kee-wai Lau (Hongkong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL; 2 Lösungen), Chr. A. Meyer (Bern), P. Müller (Nürnberg, BRD), S. Nanba (Okayama, Japan), J. Schwaiger (Graz, A), P. Streckeisen (Zürich), M. Vowe (Therwil), K. Warneke (Vechta, BRD), H. Widmer (Rieden), C. Wildhagen (Breda, NL).

Berichtigung zu Aufgabe 921 (Vol. 41, 1986, p. 42–43). Der Aufgabensteller bemerkt, dass die von V. D. Mascioni angegebene Verschärfung der linken Ungleichung falsch ist. Den folgenden korrekten Beweis jener Ungleichung sandte M. S. Klamkin (Alberta, CD):

Using the A. M. – G. M. inequality, it suffices to show that

$$\left(a^n b^n c^n \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \right)^{1/3} \geq 2^{n-1} \cdot 3^{(n+1)/2} r^n. \quad (1)$$

Since $abc = 4Rrs$, $\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = s/4R$, (1) is equivalent to

$$1 \geq 2^{n-1} \cdot 3^{3(n+1)/2} \left(\frac{r}{R} \right)^{n-1} \left(\frac{r}{s} \right)^{n+1}.$$

This follows immediately from the two well known inequalities

$$\frac{r}{R} \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{r}{s} \leq 3\sqrt{3}.$$

There is equality *iff* the triangle is equilateral.

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinschrift erbeten bis *10. Dezember 1986* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68), Problem 872 A (Band 36, S. 175), Aufgabe 880 (Band 37, S. 93).

Aufgabe 961. Für positive Zahlen x_1, x_2, x_3 sei

$$p_1 := (x_1 + x_2 + x_3)/3, \quad p_2 := (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)/3, \quad p_3 := x_1 x_2 x_3.$$

Dann gilt

$$p_3^2 + 5 p_2^3 \geq 6 p_1 p_2 p_3$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $x_1 = x_2 = x_3$. Dies ist zu zeigen.

V. D. Mascioni, Origlio

Aufgabe 962. Let f, g be nonzero orthogonal elements of $L_2(0, 1)$. Show that

$$\frac{\left(\int_0^1 f(x) dx\right)^2}{\int_0^1 (f(x))^2 dx} + \frac{\left(\int_0^1 g(x) dx\right)^2}{\int_0^1 (g(x))^2 dx} \leq 1.$$

I. Mereny, Cluj, Rumänien

Aufgabe 963.

- Von n linear angeordneten weissen Kugeln sollen k rot bemalt werden, und zwar derart, dass die roten Kugeln m Blöcke mit je mindestens s Kugeln bilden und dass die roten Blöcke durch Blöcke mit je mindestens t weissen Kugeln getrennt sind. Bestimme die Anzahl solcher Färbungen.
- Wie a), aber für den Fall, dass die n weissen Kugeln im Kreis angeordnet sind.

J. Binz, Bolligen

Aufgabe 964. Man bestimme alle Paare (a, b) von reellen Zahlen a, b derart, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$a[b n] = b[a n].$$

($[x]$ bezeichnet die grösste ganze Zahl $\leq x$.)

W. Janous, Innsbruck, A