Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **42 (1987)**

Heft 3: **Archimedes was right. Part one**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Aufgaben

Aufgabe 941. Prove that

$$-3\sqrt{3}/8 < \sin(B-C)\cos^3 A + \sin(C-A)\cos^3 B + \sin(A-B)\cos^3 C < 3\sqrt{3}/8$$

where A, B, C are the angles of a triangle.

M. S. Klamkin, Edmonton, CA

Lösung (Bearbeitung der Redaktion): Bezeichnen wir die abzuschätzende Summe mit $S(A,B,C)$, so folgt aus bekannten trigonometrischen Identitäten:

$$S(A,B,C) = -\sin(B-C)\sin(C-A)\sin(A-B).$$

O. B. d. A. sei $A > B > C$. Setzen wir nun

$$\alpha := B-C, \quad \beta := \pi + C - A, \quad \gamma := A - B,$$

so folgt $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, d.h. α, β, γ sind die Innenwinkel eines Dreiecks. Mithin ist nach einer bekannten Dreiecksungleichung

$$|S(A,B,C)| = \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \le 3\sqrt{3}/8,$$

mit Gleichheit g.d.w. $\alpha=\beta=\gamma=\pi/3$, d.h. $A=2\pi/3$, $B=\pi/3$, $C=0$. In diesem Fall ist das ursprüngliche Dreieck ausgeartet.

G. Bercea, München, BRD

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), Kee-wai Lau (Hongkong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), P. Müller (Nürnberg, BRD), S. Nanba (Okayama, Japan), Hj. Stocker (Wädenswil), M. Vowe (Therwil).

Aufgabe 942. Es sei

$$S_{n,k} := \sum_{j=1}^{n^k} \frac{n^{k-1}}{n^k + j^k}, \qquad n,k \in \mathbb{N}.$$

Man ermittle $S_k := \lim_{n\to\infty} S_{n,k}$ sowie $S := \lim_{k\to\infty} S_k$.

Bemerkung: Bekannt sind $S_1 = \ln 2$ and $S_2 = \pi/2$ (Putnam Competition 1961/3).

M. Vowe, Therwil

Solution: The sum $S_{n,k}$ can be written as

$$S_{n,k} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n^k} \frac{1}{1+(j/n)^k},$$

a Riemann lower sum for the integral of $t \mapsto (1+t^k)^{-1}$ over $(0, n^{k-1})$. Since $n^{k-1}=1$ for $k=1$ and $n^{k-1} \to \infty$ for $k>1$ as $n \to \infty$, it follows that

$$S_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ln 2$$

and

$$S_k = \int_0^\infty \frac{1}{1+t^k}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{k}\csc\left(\frac{\pi}{k}\right) \quad \text{for} \quad k>1\,.$$

Clearly $S_k \to 1$ as $k \to \infty$; or $S=1$.

Remark: The value of S may be determined without having to know the actual value of S_k. For instance, by Lebesgue's dominated convergence theorem,

$$S = \lim_{k\to\infty} S_k = \int_0^\infty \left\{\lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+t^k}\right\} \mathrm{d}t = \int_0^1 1\,\mathrm{d}t = 1\,.$$

A. A. Jagers, Enschede, NL

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), Kee-wai Lau (Hongkong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), P. Müller (Nürnberg, BRD), S. Nanba (Okayama, Japan), S. Schwaiger (Graz, A), Hj. Stocker (Wädenswil), C. Wildhagen (Breda, NL), R. Wyss (Flumenthal).

Aufgabe 943. Das Produkt

$$\prod_{k=1}^{n-1} [\cos(2k\pi/n) - \cos(2\alpha)]\,, \qquad n \geq 2\,, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

ist geschlossen auszuwerten.

V. D. Mascioni, Origlio

Lösung: Mit $z := e^{i\alpha}$, $w := e^{i\pi/n}$ ist der typische Factor $\cos\dfrac{2k\pi}{n} - \cos 2\alpha$ des mit P_n bezeichneten Produkts der Aufgabenstellung gleich

$$-\tfrac{1}{2}(z^2+z^{-2}-w^{2k}-w^{-2k}) = -\tfrac{1}{2}z^{-2}(z-w^k)(z-w^{2n-k})(z-w^{n-k})(z-w^{n+k})\,.$$

Hieraus folgt wegen $z^{2n}-1 = \prod_{k=0}^{2n-1}(z-w^k)$

$$P_n = (-2z^2)^{1-n} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{2n-1} (z-w^k)^2 = (-2z^2)^{1-n}\left(\frac{z^{2n-1}}{z^2-1}\right)^2$$

$$= (-2)^{1-n}\left(\frac{z^n-z^{-n}}{z-z^{-1}}\right)^2 = (-2)^{1-n}\left(\frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}\right)^2, \qquad \alpha \not\equiv 0 \bmod \pi\,.$$

Durch Grenzübergang $\alpha \to 0$ erkennt man, dass

$$P_n = (-2)^{1-n} \cdot n^2 \qquad \text{falls} \qquad \alpha \equiv 0 \bmod \pi .$$

P. Bundschuh, Köln, BRD

Bemerkung der Redaktion: O. P. Lossers und M. Vowe verweisen auf bekannte Verallgemeinerungen der Aufgabe, s. folgendes

LITERATURVERZEICHNIS

1 G. Chrystal: Textbook of Algebra, vol. 2, 7th Edition, New York 1964, p. 356.
2 E. R. Hansen: A table of series and products, Prentice Hall, Formula 91.1.16., p. 497.

Weitere Lösungen sandten K. Dilcher (Halifax, CD), F. Götze (Jena, DDR), A. A. Jagers (Enschede, NL), L. Kuipers (Sierre), W. Janous (Innsbruck, A), Kee-wai Lau (Hongkong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL; 2 Lösungen), Chr. A. Meyer (Bern), P. Müller (Nürnberg, BRD), S. Nanba (Okayama, Japan), J. Schwaiger (Graz, A), P. Streckeisen (Zürich), M. Vowe (Therwil), K. Warneke (Vechta, BRD), H. Widmer (Rieden), C. Wildhagen (Breda, NL).

Berichtigung zu Aufgabe 921 (Vol. 41, 1986, p. 42–43). Der Aufgabensteller bemerkt, dass die von V. D. Mascioni angegebene Verschärfung der linken Ungleichung falsch ist. Den folgenden korrekten Beweis jener Ungleichung sandte M. S. Klamkin (Alberta, CD):
Using the A. M. – G. M. inequality, it suffices to show that

$$\left(a^n b^n c^n \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}\right)^{1/3} \ge 2^{n-1} \cdot 3^{(n+1)/2} r^n . \tag{1}$$

Since $a b c = 4 R r s$, $\cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2} = s/4R$, (1) is equivalent to

$$1 \ge 2^{n-1} \cdot 3^{3(n+1)/2} \left(\frac{r}{R}\right)^{n-1} \left(\frac{r}{s}\right)^{n+1} .$$

This follows immediately from the two well known inequalities

$$\frac{r}{R} \le \frac{1}{2}, \quad \frac{r}{s} \le 3\sqrt{3} .$$

There is equality *iff* the triangle is equilateral.

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Dezember 1986* an *Dr. H. Kappus.* Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44), Problem 862A (Band 36, S. 68), Problem 872A (Band 36, S. 175), Aufgabe 880 (Band 37, S. 93).

Aufgabe 961. Für positive Zahlen x_1, x_2, x_3 sei

$$p_1 := (x_1+x_2+x_3)/3\,, \qquad p_2 := (x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)/3\,, \qquad p_3 := x_1x_2x_3\,.$$

Dann gilt

$$p_3^2+5p_2^3 \geq 6p_1p_2p_3$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $x_1=x_2=x_3$. Dies ist zu zeigen.

V. D. Mascioni, Origlio

Aufgabe 962. Let f, g be nonzero orthogonal elements of $L_2(0,1)$. Show that

$$\frac{\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2}{\int_0^1 (f(x))^2\,\mathrm{d}x}+\frac{\left(\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2}{\int_0^1 (g(x))^2\,\mathrm{d}x} \leq 1\,.$$

I. Mereny, Cluj, Rumänien

Aufgabe 963.

a) Von n linear angeordneten weissen Kugeln sollen k rot bemalt werden, und zwar derart, dass die roten Kugeln m Blöcke mit je mindestens s Kugeln bilden und dass die roten Blöcke durch Blöcke mit je mindestens t weissen Kugeln getrennt sind. Bestimme die Anzahl solcher Färbungen.
b) Wie a), aber für den Fall, dass die n weissen Kugeln im Kreis angeordnet sind.

J. Binz, Bolligen

Aufgabe 964. Man bestimme alle Paare (a,b) von reellen Zahlen a, b derart, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$a[bn]=b[an]\,.$$

($[x]$ bezeichnet die grösste ganze Zahl $\leq x$.)

W. Janous, Innsbruck, A