Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 42 (1987)
Heft: 2

Artikel: Zur Abschätzung des Brocardschen Winkels. II
Autor: Mascioni, V.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-40031

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

3 D. Jarden, Recurring Sequences. Third edition (1973), Riveon Lematematika: Israel, Chapter 29.
4 D. Kalman: The Generalized Vandermonde Matrix. Math. Magazine *57*, no. 1, 15–21 (1984).
5 K. S. Miller: Linear Difference Equations. New York: W. A. Benjamin Inc. (1968), X + 165 pages.
6 M. R. Spiegel: Finite Differences and Difference Equations. Schaum's Outline Series (1971), McGraw-Hill, 259 pages.

© 1987 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/87/020032-04$1.50+0.20/0

Zur Abschätzung des Brocardschen Winkels, II

Für Definitionen und Bezeichnungen sei auf [1] verwiesen.
In [1] wurde gezeigt, dass

$$2\,\omega \leq \frac{3}{\sum 1/\alpha_i}, \tag{1}$$

und dass Gleichheit genau im gleichseitigen Fall besteht (*GGG*). Diese Note ist dem Beweis der in [1] vermuteten Ungleichung

$$\sqrt{\frac{3}{\sum 1/\alpha_i^2}} \leq 2\,\omega \qquad (GGG) \tag{2}$$

gewidmet. (1) und (2) bedeuten schon eine sehr gute Abschätzung von ω, wenn man beachtet, dass vor zwanzig Jahren nur

$$\min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \leq 2\,\omega \leq \frac{\pi}{3} \qquad (GGG)$$

bekannt war. Wir werden im Satz 3 die Frage nach der besten Abschätzung genauer stellen.
Der Beweis von (2) stützt sich auf dieselbe Beweisidee wie (1). Dabei stösst man aber auf viele neue technische Schwierigkeiten. Nach zwei Lemmas werden wir zunächst (2) auf den gleichschenkligen Fall reduzieren.

Lemma 1: (i) *Die Funktion* $f(x) := \frac{1}{x} - \cot x$ *ist strikt konvex in* $(0, \pi)$.
(ii) *Es gilt*

$$\frac{1}{x} - \cot x > \frac{x}{3} > \frac{\operatorname{tg} x}{3 + \operatorname{tg}^2 x} =: g(x)$$

für $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(iii) *Die Funktion* $h(x) := \left(\frac{x}{\sin x}\right)^4 (1 + 2\cos^2 x)$ *ist strikt monoton wachsend in* $(0, \pi)$.

Beweis: (i) Nach [1] (Lemma 2) ist $\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \cos x$ strikt monoton fallend in $(0, \pi)$. Insbesondere haben wir

$$\left(\frac{x}{\sin x}\right)^3 \cos x < 1$$

für $x \in (0, \pi)$ und somit

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}\left[1 - \left(\frac{x}{\sin x}\right)^3 \cos x\right] > 0$$

für $x \in (0, \pi)$, d. h., f ist strikt konvex in $(0, \pi)$.

(ii) Aus

$$g''(x) = \frac{4 \sin(2x)}{(2+\cos(2x))^3}[\cos(2x) - 1] < 0, \qquad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

entnimmt man, dass $g(x)$ strikt konkav in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ist. (ii) folgt jetzt sofort aus $f(0^+) = g(0^+) = 0$, $f'(0^+) = g'(0^+) = 1/3$, und aus (i).

(iii) Wegen

$$h'(x) = \frac{4x^3}{\sin^5 x}[\sin x\,(1 + 2\cos^2 x) - x \cos x\,(2 + \cos^2 x)]$$

ist die Behauptung für $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ klar. Sei nun $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Dann ist $h'(x) > 0$ äquivalent zu

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} > \frac{2+\cos^2 x}{1+2\cos^2 x} = 1 + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{3+\operatorname{tg}^2 x}$$

d. h. zu

$$\frac{1}{x} - \cot x > \frac{\operatorname{tg} x}{3+\operatorname{tg}^2 x},$$

was unter (ii) bewiesen ist.
Das folgende Lemma ist bekannt, sein Beweis wird aber der Vollständigkeit halber aufgeführt:

Lemma 2: *Für den Brocardschen Winkel ω gilt*

$$\csc^2 \omega = \sum \csc^2 \alpha_i .$$

Beweis: Wegen $\cot\omega = \sum \cot\alpha_\iota$ hat man zunächst

$$\csc^2\omega = 1 + \cot^2\omega = 1 + (\sum \cot\alpha_\iota)^2$$
$$= \sum \csc^2\alpha_\iota + 2\left[\left(\sum_{\iota<\lambda} \cot\alpha_\iota \cot\alpha_\lambda\right) - 1\right].$$

Für $\{\iota, \varkappa, \lambda\} = \{1, 2, 3\}$ ist aber

$$\operatorname{tg}\alpha_\iota \operatorname{tg}\alpha_\lambda = 1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha_\iota + \operatorname{tg}\alpha_\lambda}{\operatorname{tg}(\alpha_\iota + \alpha_\lambda)}$$

und, wegen $\operatorname{tg}(\alpha_\iota + \alpha_\lambda) = -\operatorname{tg}\alpha_\varkappa$,

$$\cot\alpha_\iota \cot\alpha_\lambda = \frac{\operatorname{tg}\alpha_\varkappa}{\operatorname{tg}\alpha_\iota + \operatorname{tg}\alpha_\varkappa + \operatorname{tg}\alpha_\lambda},$$

d. h.

$$\sum_{\iota<\lambda} \cot\alpha_\iota \cot\alpha_\lambda = 1$$

und somit

$$\csc^2\omega = \sum \csc^2\alpha_\iota .$$

Satz 1: *Gilt Ungleichung* (2) *für alle gleichschenklige Dreiecke, dann gilt sie allgemein.*

Beweis: Lemma 2 gibt Anlass zur Definition der Funktion

$$\omega := \omega(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) := \arcsin\left[\left(\sum \frac{1}{\sin^2\alpha_\iota}\right)^{-1/2}\right].$$

Wir setzen nun

$$M_{-2} := M_{-2}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) := \sqrt{\frac{3}{\sum 1/\alpha_\iota^2}},$$

und wenden die Methode von Lagrange auf die Funktion

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) := 2\omega - M_{-2}.$$

an.
Die Nebenbedingung $\sum \alpha_\iota = \pi$ führt dann zum Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial \alpha_\iota} = 2\frac{\sin^3\omega}{\cos\omega}\frac{\cos\alpha_\iota}{\sin^3\alpha_\iota} - \frac{1}{3}M_{-2}^3\frac{1}{\alpha_\iota^3} = \lambda, \qquad \iota = 1, 2, 3 \\ &\sum_\iota \alpha_\iota = \pi . \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Es sei $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda)$ eine Lösung von (3); ferner sei $A := 2\frac{\sin^3\omega}{\cos\omega}$, $B := \frac{1}{3} M_{-2}^3$. Für die Funktion

$$f(x) := A\frac{\cos x}{\sin^3 x} - B\frac{1}{x^3}$$

gilt offenbar $f'(x) = 0$ genau dann, wenn

$$\frac{3B}{A} = \left(\frac{x}{\sin x}\right)^4 (1 + 2\cos^2 x).$$

Nach Lemma 1.(iii) hat aber dies höchstens eine Lösung in $(0, \pi)$, d.h., $f(x) = \lambda$ hat höchstens zwei Lösungen in $(0, \pi)$. Es folgt also, dass das System (3) nur von gleichschenkligen Dreiecken lösbar ist, und dies beweist den Satz.
Die Aussage im gleichschenkligen Fall hängt vom folgenden Lemma ab, dessen «brute force» Beweis im Anhang zu finden ist:

Lemma 3: *Die Gleichung*

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{8(\pi - x)^3 - x^3}{[8(\pi - x)^2 + x^2]^{3/2}} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\frac{1}{5 + 4\cos x}$$

hat genau drei Lösungen $x_1 < x_2 < x_3$ *in* $(0, \pi)$, *für die gilt*

$$0 < x_1 < \frac{\pi}{2}; \quad x_2 = \frac{2\pi}{3}; \quad \frac{3\pi}{4} < x_3 < \pi.$$

Satz 2: (2) *gilt für alle Dreiecke.*

Beweis: Nach Satz 1 genügt es, gleichschenklige Dreiecke mit Winkeln α, α, $\pi - 2\alpha$ zu betrachten $\left(\alpha < \frac{\pi}{2}\right)$. (2) nimmt dann die Form

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2}{\alpha^2} + \frac{1}{(\pi - 2\alpha)^2}\right)^{-1/2} \leq \operatorname{arcot}(2\cot\alpha - \cot(2\alpha))$$

oder, nach der Substitution $x := 2\alpha$ $(0 < x < \pi)$,

$$l(x) := \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{x(\pi - x)}{[8(\pi - x)^2 + x^2]^{1/2}} \leq \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin x}{2 + \cos x}\right) =: r(x).$$

Zu beachten ist, dass $l(x)$ und $r(x)$ auch bei $x = 0, \pi$ definiert sind. Die Gleichung, die Gegenstand von Lemma 3 ist, ist nichts anderes als $l'(x) = r'(x)$: wir wissen somit,

dass $(r-l)'(x)=0$ genau drei Lösungen in $[0,\pi]$ hat, nämlich x_1, x_2, x_3, wobei

$$0<x_1<\frac{\pi}{2}; \quad x_2=\frac{2\pi}{3}; \quad \frac{3\pi}{4}<x_3<\pi.$$

Satz 2 ist also mit der Gültigkeit von $l(x)\leq r(x)$ an den Stellen $x=0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$ bewiesen.

Zum Schluss sei noch kurz auf die Frage nach der besten Abschätzung von ω eingegangen. Es steht fest, dass

$$M_{-2}\leq 2\omega\leq M_{-1}.$$

Es wäre jetzt interessant zu wissen, wie man am besten 2ω durch Mittelwerte approximieren kann. Der folgende Satz ist ein erster Schritt in dieser Richtung:

Satz 3: *Ist r die kleinste und s die grösste positive reelle Zahl derart, dass*

$$M_{-r}\leq 2\omega\leq M_{-s} \tag{4}$$

dann gilt

$$1\leq s\leq\frac{\log(3/2)}{\log(4/3)}<\frac{\log 3}{\log 2}\leq r\leq 2.$$

Beweis: $1\leq s<r\leq 2$ folgt aus (4). Für zwei Funktionen f und g schreiben wir $f\simeq g$, falls $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f(\varepsilon)/g(\varepsilon)=1$.

Betrachtet man das Dreieck mit Winkeln $\varepsilon, \frac{\pi}{2}-\varepsilon, \frac{\pi}{2}$, so hat man

$$M_{-r}(\varepsilon)=3^{1/r}\left(\frac{3}{\frac{1}{\varepsilon^r}+\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)^r}+\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^r}}\right)^{1/r}\simeq 3^{1/r}\cdot\varepsilon,$$

$$\cot\omega(\varepsilon)=\cot\varepsilon+\cot\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)=\cot\varepsilon+\operatorname{tg}\varepsilon\simeq\frac{1}{\varepsilon},$$

$$2\omega(\varepsilon)\simeq 2\operatorname{arcot}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\simeq 2\varepsilon.$$

Nach der Definition von r ist $3^{1/r}\leq 2$, d.h. $r\geqq\frac{\log 3}{\log 2}$. Die Ungleichung $s\leq\frac{\log(3/2)}{\log(4/3)}$ beweist man auf analoge Weise durch die Betrachtung des Dreiecks mit Winkeln $\varepsilon, \varepsilon, \pi-2\varepsilon$.

Anhang: Beweis von Lemma 3.

Lemma 4: *Die Funktion* $d(x) := \dfrac{\sin x}{x(\pi - x)}$ *ist strikt monoton wachsend in* $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, *bzw. fallend in* $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Beweis: Wegen $d(x) = d(\pi - x)$ für $x \in (0, \pi)$ und

$$d'(x) = \frac{\sin x}{x(\pi - x)}\left(\cot x - \frac{\pi - 2x}{x(\pi - x)}\right)$$

genügt es zu zeigen, dass

$$\cot x > \frac{\pi - 2x}{x(\pi - x)}, \qquad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

d. h.,

$$\frac{1}{x} - \cot x < \frac{1}{\pi - x}, \qquad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Dies folgt aber sofort aus der Konvexität von $\dfrac{1}{x} - \cot x$ (Lemma 1.(i)) und von $\dfrac{1}{\pi - x}$; die Gerade $y = \dfrac{4}{\pi^2} x$ ist Stützgerade von $\dfrac{1}{\pi - x}$ und verbindet die Punkte $(0, 0)$, $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{2}{\pi}\right)$, d. h., sie liegt oberhalb $\dfrac{1}{x} - \cot x$.

Lemma 5: *Die Gleichung*

$$a(x) := \frac{5}{8} \frac{8\pi - 9x}{8(\pi - x)^2 + x^2} = \frac{\sin x}{5 + 4\cos x} =: b(x)$$

besitzt genau eine Lösung in $(0, \pi)$ (*nämlich* $x_0 \doteq 2.1250$).

Beweis: Sei $x \in (0, \pi)$. Wegen

$$a'(x) = \frac{5/8}{[8(\pi - x)^2 + x^2]^2}(81x^2 - 144\pi x + 56\pi^2)$$

gilt $a'(x) = 0$ genau für $x =: y_1 = \dfrac{2\pi}{9}(4 - \sqrt{2}) \doteq 1.8052$. Andererseits ist wegen

$$b'(x) = \frac{4 + 5\cos x}{(5 + 4\cos x)^2}$$

$b'(x)=0$ genau für $x=:y_2=\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\doteq 2.4981$. $a(x)$ (bzw. $b(x)$) nimmt bei y_1 (bzw. bei y_2) ein Maximum an. Wir stellen somit folgendes fest:

(i) $a(0)=\frac{5}{8\pi}>b(1.1) \quad\Rightarrow\quad a(x)>b(x)$ für $0<x\leq 1.1$.

(ii) $a(1.1)>b(y_1) \quad\Rightarrow\quad a(x)>b(x)$ für $1.1\leq x\leq y_1$.

(iii) $a(x)$ fällt und $b(x)$ wächst in (y_1,y_2). Wegen $a(y_2)<b(y_2)$ gibt es dann genau ein $x_0\in(y_1,y_2)$ mit $a(x_0)=b(x_0)$.

(iv) $a(x)\leq 0$ für $x\in\left[\frac{8\pi}{9},\pi\right)$. Wegen $a(y_2)<b\left(\frac{8\pi}{9}\right)$ hat man schliesslich $a(x)<b(x)$ für $y_2\leq x<\pi$.

Lemma 6: *Die Gleichung*

$$c(x):=2\sqrt{3}\,\pi^2\frac{(5+4\cos x)^2}{[8(\pi-x)^2+x^2]^{5/2}}=\frac{\sin x}{x(\pi-x)}=:d(x)$$

besitzt genau zwei Lösungen in $(0,\pi)$ (*nämlich* $x_1\doteq 1.6873$ *und* $x_2\doteq 2.5412$).

Beweis: Lemma 4 besagt, dass $d(x)$ monoton in $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ und $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ ist mit einem Maximum bei $\frac{\pi}{2}\left(d\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4}{\pi^2}\right)$. Es folgt, dass $d(x)>1/\pi$ für alle $x\in(0,\pi)$. Wegen Lemma 5 und

$$c'(x)=\frac{2\sqrt{3}\,\pi^2(5+4\cos x)}{[8(\pi-x)^2+x^2]^{7/2}}\{5(5+4\cos x)(8\pi-9x)-8\sin x[8(\pi-x)^2+x^2]\}$$

folgern wir, dass $c'(x)$ eine einzige Nullstelle in $(0,\pi)$ hat ($x_0\doteq 2.1250$), die offenbar ein Maximum von $c(x)$ ist. Es bestehen jetzt folgende Implikationen

(i) $c(1.41)<\frac{1}{\pi} \quad\Rightarrow\quad c(x)<d(x)$ für $0<x\leq 1.41$.

(ii) $c(1.68)<d(1.41)<d(1.68) \quad\Rightarrow\quad c(x)<d(x)$ für $1.41\leq x\leq 1.68$.

(iii) $c(1.69)>d(1.69) \quad\Rightarrow$ Es gibt ein $x_1\in(1.68,1.69)$ mit $c(x_1)=d(x_1)$.

Insbesondere gibt es genau ein solches x_1 in diesem Intervall, weil hier $c(x)$ wächst und $d(x)$ fällt.

(iv) $\min(c(1.69),c(2.47))>\frac{4}{\pi^2} \quad\Rightarrow\quad c(x)>d(x)$ für $1.69\leq x\leq 2.47$.

(v) $c(2.53)>d(2.47)>d(2.53) \quad\Rightarrow\quad c(x)>d(x)$ für $2.47\leq x\leq 2.53$.

(vi) $c(2.55)<d(2.55) \quad\Rightarrow$ Es gibt ein $x_2\in(2.53,2.55)$ mit $c(x_2)=d(x_2)$.

$c(x)$ und $d(x)$ sind in diesem Intervall beide fallend und wegen $|d'(x)| < 0.1 < 0.4 < |c'(x)|$ für $x \in (2.53, 2.55)$, wie man leicht sieht, ist ein solches x_2 eindeutig bestimmt.

(vii) $c(2.6) < c(2.55) < d(2.6) \Rightarrow c(x) < d(x)$ für $2.55 \leq x \leq 2.6$.

(viii) $c(2.64) < c(2.6) < d(2.64) \Rightarrow c(x) < d(x)$ für $2.6 \leq x \leq 2.64$.

(ix) $c(2.64) < 1/\pi \Rightarrow c(x) < d(x)$ für $2.64 \leq x < \pi$.

Lemma 6 ist somit bewiesen.

Beweis von Lemma 3: Um zu beweisen, dass

$$e(x) := \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{8(\pi - x)^3 - x^3}{[8(\pi - x)^2 + x^2]^{3/2}} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \frac{1}{5 + 4\cos x} =: f(x)$$

genau drei Lösungen in $(0, \pi)$ hat, genügt es zu zeigen, dass $e'(x) = f'(x)$ genau zwei Lösungen in $(0, \pi)$ hat. Da aber $e'(x) = f'(x)$ zur Gleichung $c(x) = d(x)$ von Lemma 6 äquivalent ist, ist Lemma 3 bewiesen.

Nach Abfassung dieser Note wurde ich darauf aufmerksam gemacht, dass Stroeker und Hoogland meine Ungleichungen (1) und (2) in [2] vermutet haben. Sie haben insbesondere auch versucht, die Vermutung numerisch glaubwürdig zu machen.

V. Mascioni, Math.-Departement ETH-Zürich

LITERATUR

1 V. Mascioni: *Zur Abschätzung des Brocardschen Winkels,* El. Math. 41, 98–101 (1986).

2 R. J. Stroeker, H. J. T. Hoogland: *Brocardian geometry revisited, or some remarkable inequalities,* Nieuw Arch. voor Wisk. (4) 2, 281–310 (1984).

© 1987 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/87/020042-04$1.50+0.20/0

Didaktik und Elementarmathematik

Perfekte Dreiecke

Wir nennen ein Dreieck *perfekt,* wenn seine Seitenlängen a, b, c, sein Flächeninhalt A, sein Inkreisradius ϱ und seine Ankreisradien ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c ganzzahlig sind und wenn a, b, c, ϱ, ϱ_a, ϱ_b und ϱ_c teilerfremd sind. Beispiele sind am Schluss dieser Studie aufgeführt. Wir geben im folgenden alle rechtwinkligen und alle gleichschenkligen perfekten Dreiecke an. Dann zeigen wir, dass es zu jedem ϱ nur endlich viele perfekte Dreiecke gibt, wovon für $\varrho \geq 2$ je mindestens eines weder rechtwinklig noch gleichschenklig ist. Als nächstes beschreiben wir ein Verfahren, mit dem man zu gegebenem ϱ alle perfekten Dreiecke finden kann. Schliesslich geben wir alle perfekten Dreiecke mit $1 \leq \varrho \leq 5$ an.