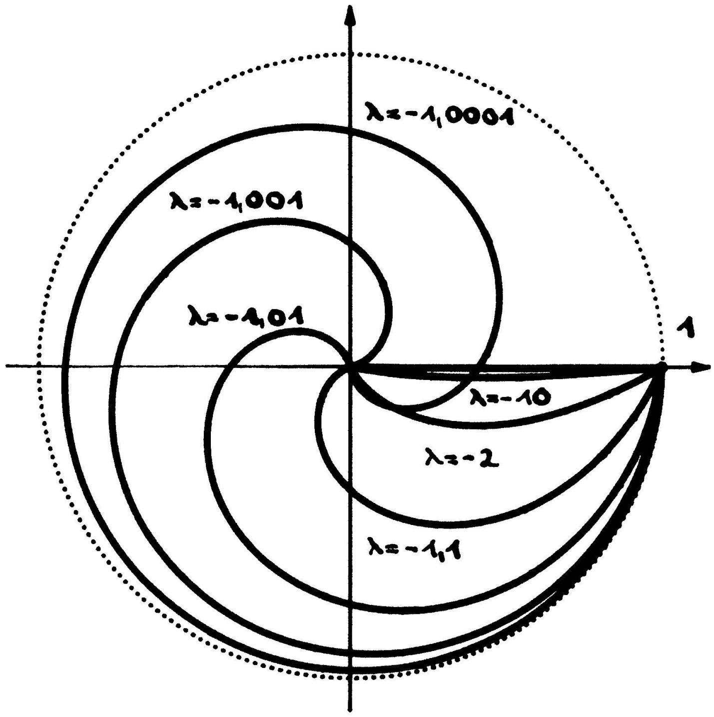
Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 41 (1986)

Heft: 6

Rubrik: Aufgaben



Figur 4. Der Fall $\lambda < -1$: Halbschleifen, welche den Nullpunkt mit dem Punkt $r = 1$, $\phi = 0$ verbinden. Für $\lambda \to -\infty$ erhält man die Strecke $0 \leqq r \leqq 1$, $\phi = 0$.

8. Zusammenfassung

Die in Zusammenfassung mit Viètes Näherungsmethode zur Tangentenbestimmung betrachtete Klasse ebener Kurven besteht aus allen Lösungen der DGl $V(r) = 0$. Die Lösungen sind explizit durch (20), (21) und (23) gegeben; dazu kommen noch alle Kreise $r(\phi) = \text{const.}$

A. Voigt, Math. Institut 1, Universität Karlsruhe

LITERATUR

1 W. Gröbner und N. Hofreiter: Integraltafel. Erster Teil, Unbestimmte Integrale, 2. Auflage, Wien und Innsbruck, Springer-Verlag (1957).
2 J. E. Hofmann: François Viète und die Archimedische Spirale. Arch. Math. *V*, 138–147 (1954).

Aufgaben

Aufgabe 932. Es sei

$$a_n = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n-k}{k} t^{2n-3k}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Man untersuche das Konvergenz- bzw. Divergenzverhalten der Zahlenfolge (a_n) in Abhängigkeit vom reellen Parameter t.

J. C. Binz, Bolligen

Lösung. Unter Benutzung elementarer Eigenschaften der Binomialkoeffizienten zeigt man leicht, dass die Glieder der Folge (a_n) der linearen Differenzengleichung

$$a_n - t^2\, a_{n-1} - t\, a_{n-2} = 0$$

zweiter Ordnung mit den Anfangsbedingungen $a_0 = 1$, $a_1 = t^2$ genügen. Somit lässt sich a_n $(n \geqq 1)$ in geschlossener Form als deren Lösung darstellen:

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{2\,|t|^{n/2}}{\sqrt{4-|t|^3}} \sin\left((n+1)\arccos\left(\dfrac{|t|^{3/2}}{2}\right)\right) & \text{falls} \quad -4^{1/3} < t \leqq 0 \\ 2^{n/3}(n+1) & \text{falls} \quad t = -4^{1/3} \\ \dfrac{\left(\dfrac{t^2+\sqrt{t^4+4t}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{t^2-\sqrt{t^4+4t}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{t^4+4t}} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daraus lässt sich das Konvergenzverhalten der Folge (a_n) durch Betrachten der Terme $|t|^{n/2}$ bzw. $(t^2 + \sqrt{t^4+4t})^{n+1}$ ablesen:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad \text{falls} \quad -1 < t < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \qquad \text{falls} \quad t = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Für $t = -1$ ist $(a_n) = (1, 1, 0, -1, -1, 0, \ldots)$ periodisch mit der Periode 6, für alle anderen Werte von t ist (a_n) unbeschränkt und damit ebenfalls divergent.

R. Wyss, Flumenthal

Weitere Lösungen sandten O. Buggisch (Darmstadt, BRD), W. Janous (Innsbruck, A), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), P. Müller (Nürnberg, BRD), M. Vowe (Therwil), K. Warneke (Vechta, BRD). Zwei Lösungen waren fehlerhaft.

Aufgabe 933. m und n seien nichtnegative ganze Zahlen. Die Funktion f: $[0,1] \to \mathbb{R}$ sei n-mal stetig differenzierbar, und es gelte

$$f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) \quad \text{für } k = 0, \ldots, n-1 \tag{1}$$

sowie

$$\int_0^1 x^j f(x)\, dx = 0 \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, m\,. \tag{2}$$

Man zeige, dass

$$\left(\int_0^1 f(x)\, dx\right)^2 \leqq (2n+1)\left[\frac{n!\, m!}{(2n+m+1)!}\right]^2 \int_0^1 [f^{(n)}(x)]^2\, dx\,.$$

Wann genau gilt Gleichheit? H. J. Seiffert, Berlin, BRD

Solution

Let F denote the set of functions $f \in C^{(n)}[0,1]$ satisfying the conditions (1) and (2) in the formulation of the problem. It follows from (1) that

$$\int_0^1 x^j f^{(n)}(x)\,dx = (-1)^n \int_0^1 f(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^n x^j\,dx\,.$$

So, we may conclude from (2) that

$$\int_0^1 x^j f^{(n)}(x)\,dx = 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots, n-1, n+1, \ldots, n+m;\ f \in F)\,.$$

Hence

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 = \left(\int_0^1 \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(x)\,dx\right)^2 = \left(\int_0^1 p(x)\,f^{(n)}(x)\,dx\right)^2 \leqq$$

$$\leqq \int_0^1 p^2(x)\,dx \cdot \int_0^1 [f^{(n)}(x)]^2\,dx \tag{3}$$

for all polynomials $p \in \Pi_{n+m}$ for which $p^{(n)}(0) = 1$.
Now, let $\bar{p} \in \Pi_{2n+m}$ be the polynomial given by

$$\bar{p}(x) = \frac{(-1)^n (2n+1)}{\binom{m+n}{n}(2n+m+1)!}\,\frac{1}{x}\left(\frac{d}{dx}\right)^m x^{n+m+1}(1-x)^{n+m}\,.$$

Then, an elementary calculation shows that

$$\bar{p}^{(n)} \in \Pi_{n+m} \quad \text{with} \quad \bar{p}^{(2n)}(0) = 1,\ \bar{p} \in F, \quad \text{and}$$

$$(-1)^n \int_0^1 \bar{p}(x)\,dx = \int_0^1 [\bar{p}^{(n)}(x)]^2\,dx = (2n+1)\left(\frac{n!\,m!}{(2n+m+1)!}\right)^2.$$

By substituting $\bar{p}^{(n)}$ in (3), we obtain the desired inequality of the problem. Moreover, this inequality reduces to an equality for $f = \bar{p}$.
Standard arguments may now be used to show that equality holds if and only if f is a scalar multiple of $\bar{p}$. □

H. G. ter Morsche, Eindhoven, NL

Weitere Lösungen sandten W. Janous (Innsbruck, A), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), P. Müller (Nürnberg, BRD).

Aufgabe 934. Man beweise für natürliche Zahlen n die Ungleichung

$$2\arctan\frac{1}{2n-1} < \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2}.$$

P. Ivady, Budapest, Ungarn

Solution

Let $f(n) = 2\arctan\dfrac{1}{2n-1} - \displaystyle\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2}$.

We have

$$f(1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{6} < 0,$$

$$f(n+1) = f(n) + 2\left(\frac{1}{2n^2} - \arctan\frac{1}{2n^2}\right) > f(n)$$

and

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 0.$$

It follows that $f(n) < 0$ for all n and the solution to the problem is complete.

Kee-wai Lau, Hongkong

Weitere Lösungen sandten E. Braune (Linz, A; mit Verschärfung und Verallgemeinerung), O. Buggisch (Darmstadt, BRD), K. Dilcher (Halifax, CD), J. M. Ebersold (Winterthur), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), Chr. A. Meyer (Bern), A. Müller (Zürich), P. Müller (Nürnberg, BRD), H.-J. Seiffert (Berlin, BRD), N. Sivakumar und Z. Yang (Alberta, CD), M. Vowe (Therwil), K. Warneke (Vechta, BRD), C. Wildhagen (Breda, NL), I. Merényi (Cluj, RO).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Juni 1987* and *Dr. H. Kappus.* Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44), Problem 862A (Band 36, S. 68).

Aufgabe 950. Man bestimme den kleinsten Wert, den der Durchmesser (d.i. der maximale Abstand von zwei Punkten) einer ebenen nichtkollinearen Menge von vier Punkten mit paarweise ganzzahligen Abständen annehmen kann.

H. Harborth, Braunschweig, BRD

Aufgabe 951. Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq 2$ bestimme man die Anzahl reeller Lösungen der Gleichung

$$(x+1)^x + (x+2)^x + \ldots + (x+n)^x = (x+n+1)^x .$$

L. Kuipers, Sierre

Aufgabe 952. Man beweise:

$$\int_0^u \frac{(\sin x)^2}{x} dx \int_0^u \frac{\sin x}{x} dx < 2 \int_0^u \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx , \qquad 0 < u \leqq \pi .$$

H. Alzer, Waldbröl, BRD

Literaturüberschau

R. L. Vaught: Set Theory. An Introduction. 141 Seiten, Fr. 76.–. Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart 1985.
Dieses Buch vermittelt eine didaktisch überzeugende Einführung in die Mengenlehre. In der ersten Hälfte werden Kardinalzahlen, Ordnungstypen und die Konstruktion der klassischen Zahlensysteme behandelt. Erst in der zweiten Hälfte wird die Mengenlehre axiomatisiert und die Theorie in einem etwas formaleren Rahmen weiter entwickelt. Das Buch eignet sich sowohl als «Textbook» wie auch zum Selbststudium. H. Läuchli

G. Röschert: Ethik und Mathematik. Intuitives Denken bei Cantor, Gödel und Steiner. Studien und Versuche, Band 21. 90 Seiten, DM 16.–. Freies Geistesleben, Stuttgart 1985.
Der Autor dieses kleinen Büchleins ist Anhänger der Anthroposophie. Diese Lehre hat das grosse Verdienst, sich nie mit Banalitäten zu beschäftigen, den Nachteil jedoch, nicht gerade leicht verständlich zu sein und nie über ihren Schöpfer Rudolf Steiner hinauszukommen, der immer und überall zitiert zu werden pflegt. Alles das findet man auch im vorliegenden Buch, das eine Sammlung von kürzeren Aufsätzen enthält.
Der erste, „Platonismus im Wandel. Georg Cantor.“, ist eine sehr schöne Würdigung des Schöpfers der Mengenlehre, die aber mit nicht ganz durchsichtigen Gedanken Rudolf Steiners endet. Ein anderer Aufsatz von Bedeutung ist „Kurt Gödel und Paul Finsler“. Er versucht eine Rehabilitierung der Ideen Finslers zur Logik, wobei leider nicht der Frage nachgegangen wird, warum diese Ideen nicht den Erfolg hatten, den sie verdienten.
Die restlichen Aufsätze sind eher philosophischer Natur, durchtränkt von anthroposophischen Ideen und mathematisch wenig relevant. Ob sie es philosophisch sind, möchte der Referent ebenfalls bezweifeln.

P. Wilker

H. Wussing, W. Arnold: Biographien bedeutender Mathematiker. 2. Auflage. 535 Seiten, 389 Abb., DM 42.–. Aulis Verlag Deubner, Köln 1985.
Dieses über 500 Seiten starke Buch, erstmals 1975 erschienen und nun schon in zweiter Auflage vorliegend, beinhaltet genau, was der Titel besagt: eine Sammlung von Biographien bedeutender Mathematiker. Sie beginnt mit Pythagoras und endet mit Emmy Noether; zeitgenössische Mathematiker werden bewusst ausgeklammert, ebenso wie eine Ideengeschichte, die aber durch Ueberblicke zu Beginn jedes der sieben Kapitel doch nicht ganz vernachlässigt wird. Mit ganz wenigen Ausnahmen (der Referent vermisste zum Beispiel Fibonacci)