Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 41 (1986)

Heft: 6

Artikel: Gedanken zum Integralbegriff im propädeutischen Unterricht. Teil 2, Der Integralbegriff

Autor: Weber, K.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39479

LITERATURVERZEICHNIS

1 D. W. Crowe und I. J. Schoenberg: On the equidecomposability of a regular triangle and a square of equal areas. Mitt. Math. Sem. Giessen *164*, 59–64 (1984).
2 H. E. Debrunner: Zerlegungsähnlichkeit von Polyedern. El. Math. *24*, 1–6 (1969).
3 J. Doyen und M. Landuyt: Dissections of polygons. Ann. Discr. Math. *18*, 315–318 (1983).
4 A. B. Haraziŝvili: Equicomposition of polyhedra relative to the group of homotheties and translations. Soviet Math. Dokl. *18*, No. 5, 1246–1249 (1977).
5 E. Hertel: Zur Minimalzahl von Zerlegungsteilen äquivalenter Werkstücke. Fo.-Ergebnisse FSU Jena N/82/70 (1982).
6 Ch. Meier: Zerlegungsähnlichkeit von Polyedern. J. reine angew. Math. *253*, 193–202 (1972).
7 Ch. Richter: Mitteilung an den Verfasser, Jena 1986.
8 V. B. Zylev: G-composedness and G-complementability. Soviet Math. Dokl. *9*, 403–404 (1968).

Gedanken zum Integralbegriff im propädeutischen Unterricht Teil 2: Der Integralbegriff

Im ersten Teil dieser Arbeit haben wir den Begriff des Elementarintegrals behandelt. Dabei ging es uns insbesondere darum, diesen Begriff in ein allgemeines Umfeld einzubetten, welches auch in anderen Bereichen der Analysis von Bedeutung ist. Der auch heute noch oft beschrittene klassische Weg über das Riemann-Integral wird dieser Forderung sicher nicht gerecht. In der vorliegenden zweiten Arbeit geht es nun darum, einen Integralbegriff zu entwickeln, der den, im ersten Teil formulierten, allgemeinen Forderungen weitgehend gerecht wird.

Die hier diskutierte Methode lehnt sich eng an die von Daniell entwickelte allgemeine Integralkonstruktion an [1]. Auf die berechtigte Frage, warum wir nicht gleich diese Konstruktion in ihrer vollen Allgemeinheit im Propädeutikum behandeln wollen, werden wir später eingehen.

Wir diskutieren die Methode gleich für ein beliebiges positives lineares nullstetiges Funktional l auf einem Vektorverband $\mathscr{F}$ von Funktionen auf einer Menge X. In der Tat hängt sie in keiner Weise von zusätzlichen strukturellen Voraussetzungen ab. Sie ist damit unmittelbar auf alle im ersten Teil behandelten Beispiele von Elementarintegralen anwendbar.

Wir zerlegen die Konstruktion in mehrere einfache Schritte.

Schritt 1: Es bezeichne $\mathscr{F}^{\uparrow}$ die Menge aller Funktionen $f \in \mathbb{R}^X$, zu denen eine wachsende Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen aus $\mathscr{F}$ existiert, so dass $f = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} f_n$ und $\sup_{n \in \mathbb{N}} l(f_n) < \infty$. Dann besitzt $\mathscr{F}^{\uparrow}$ folgende Eigenschaften.

(a) Für alle $f, g \in \mathscr{F}^{\uparrow}$ ist $f + g \in \mathscr{F}^{\uparrow}$, $f \vee g \in \mathscr{F}^{\uparrow}$ und $f \wedge g \in \mathscr{F}^{\uparrow}$.
(b) Für alle $f \in \mathscr{F}^{\uparrow}$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ist $\alpha f \in \mathscr{F}^{\uparrow}$.

Zu $f \in \mathscr{F}^{\uparrow}$ existiert laut Voraussetzung eine wachsende Folge $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ aus $\mathscr{F}$, so dass $f = \bigvee_{n \in \mathbf{N}} f_n$ und $\sup_{n \in \mathbf{N}} l(f_n) < \infty$. Analog sei $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ gewählt für g. Mit Hilfe von 1, (d) erhält man

$$f + g = \bigvee_{n \in \mathbf{N}} (f_n + g_n), \quad f \vee g = \bigvee_{n \in \mathbf{N}} (f_n \vee g_n), \quad f \wedge g = \bigvee_{n \in \mathbf{N}} (f_n \wedge g_n).$$

Weiter hat man

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} l(f_n + g_n) = \sup_{n \in \mathbf{N}} l(f_n) + \sup_{n \in \mathbf{N}} l(g_n) < \infty .$$

Schliesslich gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ $f_n \vee g_n + f_n \wedge g_n = f_n + g_n$ und dies impliziert

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} l(f_n \vee g_n) + \sup_{n \in \mathbf{N}} l(f_n \wedge g_n) = \sup_{n \in \mathbf{N}} l(f_n) + \sup_{n \in \mathbf{N}} l(g_n) < \infty ,$$

woraus sich die Endlichkeit der beiden links stehenden Summanden ergibt. Damit ist (a) bewiesen. (b) erhält man ähnlich.

Schritt 2: Sei $f \in \mathscr{F}^{\uparrow}$. $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ und $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ seien zwei wachsende Folgen aus $\mathscr{F}$ mit der Eigenschaft, dass

$$f = \bigvee_{n \in \mathbf{N}} f_n = \bigvee_{n \in \mathbf{N}} g_n .$$

Dann ist

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} l(f_n) = \sup_{n \in \mathbf{N}} l(g_n) .$$

Dies ergibt sich leicht aus der Nullstetigkeit. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist nämlich $f_n = \bigvee_{m \in \mathbf{N}} (f_n \wedge g_m)$ und 2,(c) impliziert

$$l(f_n) = \sup_{m \in \mathbf{N}} l(f_n \wedge g_m) \leq \sup_{m \in \mathbf{N}} l(g_m) .$$

Damit ist aber

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} l(f_n) \leq \sup_{n \in \mathbf{N}} l(g_n)$$

und analog ergibt sich die andere Richtung.
Unter Berücksichtigung von Schritt 2 definieren wir für alle $f \in \mathscr{F}^{\uparrow}$

$$l^{\uparrow}(f) := \sup_{n \in \mathbf{N}} l(f_n)$$

wobei $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ eine beliebige wachsende Folge aus $\mathscr{F}$ bezeichnet mit $f = \bigvee_{n \in \mathbf{N}} f_n$.

Schritt 3: Es gelten folgende Aussagen:

(a) Für alle $f, g \in \mathscr{F}^\uparrow$ gilt $l^\uparrow(f+g) = l^\uparrow(f) + l^\uparrow(g)$.
(b) Für alle $f \in \mathscr{F}^\uparrow$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}_+$ gilt $l^\uparrow(\alpha f) = \alpha\, l^\uparrow(f)$.
(c) Für alle $f, g \in \mathscr{F}^\uparrow$, $f \leq g$ gilt $l^\uparrow(f) \leq l^\uparrow(g)$.
(d) Für jede fallende Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathscr{F}^\uparrow$ mit $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} f_n = 0$ gilt $\inf_{n \in \mathbb{N}} l^\uparrow(f_n) = 0$.
(e) Ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine wachsende Folge aus $\mathscr{F}^\uparrow$, so dass $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} f_n$ existiert und $\sup_{n \in \mathbb{N}} l^\uparrow(f_n) < \infty$, so ist $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} f_n \in \mathscr{F}^\uparrow$.

(a) Sind $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wachsende Folgen aus $\mathscr{F}$, so dass $f = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} f_n$ und $g = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} g_n$, so findet man laut Schritt 1

$$f + g = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} (f_n + g_n)$$

und damit

$$l^\uparrow(f+g) = \sup_{n \in \mathbb{N}} l(f_n + g_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} l(f_n) + \sup_{n \in \mathbb{N}} l(g_n) = l^\uparrow(f) + l^\uparrow(g)\,.$$

(b) folgt analog.
(c) ergibt sich aus den Ueberlegungen in Schritt 2.
(d) Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine fallende Folge aus $\mathscr{F}^\uparrow$ mit der Eigenschaft, dass $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} f_n = 0$. Es sei ε eine echt positive Zahl. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es dann eine Funktion $g_n \in \mathscr{F}_+$, so dass

$$g_n \leq f_n \quad \text{und} \quad l^\uparrow(f_n) \leq l(g_n) + \varepsilon/2^n\,.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $h_n := \bigwedge_{m \leq n} g_m$. Dann ist $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine fallende Folge aus $\mathscr{F}$ und es gilt $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} h_n = 0$, woraus

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} l(h_n) = 0$$

folgt. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist aber

$$f_n - h_n \leq \sum_{m \leq n} (f_m - g_m)$$

und es ergibt sich

$$l^\uparrow(f_n) - l(h_n) \leq \sum_{m \leq n} \varepsilon/2^n\,.$$

Damit ist auch

$$\inf_{n \in \mathbf{N}} l^{\uparrow}(f_n) = 0 .$$

(e) Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $(f_{nm})_{m \in \mathbf{N}}$ eine wachsende Folge aus $\mathscr{F}$, so dass $f_n = \bigvee_{m \in \mathbf{N}} f_{nm}$. Für alle $m \in \mathbb{N}$ setzen wir $g_m := \bigvee_{n \leq m} f_{nm}$. Dann ist $(g_m)_{m \in \mathbf{N}}$ eine wachsende Folge aus $\mathscr{F}$, es gilt

$$\bigvee_{m \in \mathbf{N}} g_m = \bigvee_{n \in \mathbf{N}} f_n$$

und

$$\sup_{m \in \mathbf{N}} l(g_m) \leq \sup_{n \in \mathbf{N}} l(f_n) < \infty .$$

Schritt 4: Symmetrisch zu den bisher ausgeführten Schritten setzt man $\mathscr{F}^{\downarrow}$ gleich der Menge aller Funktionen $f \in \mathbb{R}^X$, zu denen eine fallende Folge $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ aus $\mathscr{F}$ existiert, so dass $f = \bigwedge_{n \in \mathbf{N}} f_n$ und $\inf_{n \in \mathbf{N}} l(f_n) > -\infty$. Für alle $f \in \mathscr{F}^{\downarrow}$ setzt man

$$l^{\downarrow}(f) := \inf_{n \in \mathbf{N}} l(f_n) ,$$

wobei $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ eine Folge der oben beschriebenen Art ist. Die für $\mathscr{F}^{\downarrow}$ und $l^{\downarrow}$ geltenden Gesetze sind völlig analog denjenigen, welche für $\mathscr{F}^{\uparrow}$ und $l^{\uparrow}$ formuliert wurden. Man sieht leicht, dass $f \in \mathscr{F}^{\downarrow}$ genau dann, wenn $-f \in \mathscr{F}^{\uparrow}$ und für alle solchen Funktionen f gilt $l^{\downarrow}(f) = -l^{\uparrow}(-f)$.

Schritt 5: Ist $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ eine fallende Folge aus $\mathscr{F}^{\uparrow}$ und $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ eine wachsende Folge aus $\mathscr{F}^{\downarrow}$, so dass $\bigwedge_{n \in \mathbf{N}} f_n = \bigvee_{n \in \mathbf{N}} g_n$, so gilt

$$\inf_{n \in \mathbf{N}} l^{\uparrow}(f_n) = \sup_{n \in \mathbf{N}} l^{\downarrow}(g_n) .$$

In der Tat ist $(f_n - g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ eine fallende Folge aus $\mathscr{F}^{\uparrow}$ und es gilt $\bigwedge_{n \in \mathbf{N}} (f_n - g_n) = 0$, was laut Schritt 3(d)

$$\inf_{n \in \mathbf{N}} l^{\uparrow}(f_n) - \sup_{n \in \mathbf{N}} l^{\downarrow}(g_n) = \inf_{n \in \mathbf{N}} l^{\uparrow}(f_n - g_n) = 0$$

zur Folge hat.

Schritt 6: Wir setzen nun $\mathscr{F}(l)$ gleich der Menge aller $f \in \mathbb{R}^X$, zu denen eine fallende Folge $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ aus $\mathscr{F}^{\uparrow}$ und eine wachsende Folge $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ aus $\mathscr{F}^{\downarrow}$ existieren, so dass

$$f = \bigwedge_{n \in \mathbf{N}} f_n = \bigvee_{n \in \mathbf{N}} g_n .$$

Für alle solchen f setzen wir

$$\bar{l}(f) := \inf_{n \in \mathbb{N}} l^{\uparrow}(f_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} l^{\downarrow}(g_n)\,.$$

Dann ist $\mathscr{F}(l)$ ein Vektorverband und $\bar{l}$ ein positives lineares nullstetiges Funktional auf $\mathscr{F}(l)$. Es ist $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}^{\uparrow} \cup \mathscr{F}^{\downarrow} \subset \mathscr{F}(l)$ und für alle $f \in \mathscr{F}$ gilt $l(f) = \bar{l}(f)$. Für alle $f \in \mathscr{F}^{\uparrow}$ gilt $l^{\uparrow}(f) = \bar{l}(f)$ und ebenso hat man $l^{\downarrow}(f) = \bar{l}(f)$ für alle $f \in \mathscr{F}^{\downarrow}$.
Die Behauptungen ergeben sich leicht aus den bisher beschriebenen Schritten. Wir geben den Beweis der Nullstetigkeit.
Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine fallende Folge aus $\mathscr{F}(l)$, so dass $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} f_n = 0$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es dann eine fallende Folge $(f_{nm})_{m \in \mathbb{N}}$ aus $\mathscr{F}^{\uparrow}$ mit $f_n = \bigwedge_{m \in \mathbb{N}} f_{nm}$. Für alle $m \in \mathbb{N}$ setzen wir $g_m := \bigwedge_{n \leq m} f_{nm}$. Dann ist $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine fallende Folge aus $\mathscr{F}^{\uparrow}$, für alle $m \in \mathbb{N}$ ist $g_m \geq f_m$ und es ist $\bigwedge_{m \in \mathbb{N}} g_m = 0$. Schritt 4(d) impliziert $\inf_{m \in \mathbb{N}} l^{\uparrow}(g_m) = 0$. Damit ist auch $\inf_{n \in \mathbb{N}} \bar{l}(f_n) = 0$. $\bar{l}$ ist also in der Tat nullstetig.
Damit ist unsere Integralkonstruktion beendet. Wir nennen $(\mathscr{F}(l), \bar{l})$ das elementare Integral von $(\mathscr{F}, l)$ und $\bar{l}$ das elementare Integral von l. Die Funktionen aus $\mathscr{F}(l)$ heissen integrierbar.
Die Nullstetigkeit des elementaren Integrales und ihre äquivalenten Formulierungen II(c), (d) werden sich als sehr brauchbar erweisen. Es sei noch auf eine andere Konvergenzeigenschaft hingewiesen.

Satz 1: Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge integrierbarer Funktionen, welche punktweise gegen eine integrierbare Funktion f konvergiert. g sei eine integrierbare Funktion mit der Eigenschaft, dass $|f_n| \leq g$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\bar{l}(f) = \lim_{n \to \infty} \bar{l}(f_n)$.

Laut Schritt 6 ist $(\mathscr{F}(l), \bar{l})$ selbst ein Elementarintegral. Es genügt also, wenn wir den Satz für elementar integrierbare Funktionen beweisen. Es seien also alle Funktionen aus $\mathscr{F}$. Nun beachte man, dass

$$f = \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{m \geq n} f_m = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \bigwedge_{m \geq n} f_m\,.$$

$\left(\bigvee_{m \geq n} f_m\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine fallende Folge aus $\mathscr{F}^{\uparrow}$ und $\left(\bigwedge_{m \geq n} f_m\right)_{n \in \mathbb{N}}$ eine wachsende Folge aus $\mathscr{F}^{\downarrow}$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\bar{l}(f) &= \inf_{n \in \mathbb{N}} l^{\uparrow}\left(\bigvee_{m \geq n} f_m\right) \geq \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{m \geq n} l(f_m) \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{m \geq n} l(f_m) \\ &\geq \sup_{n \in \mathbb{N}} l^{\downarrow}\left(\bigwedge_{m \geq n} f_m\right) = \bar{l}(f)\,,\end{aligned}$$

woraus man unmittelbar die gesuchte Beziehung erhält.
Satz 1 ist verwandt mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue. Seine Vorteile gegenüber den Konvergenzsätzen, welche für das Riemann-Integral unter Verwendung der

gleichmässigen Konvergenz bewiesen werden, sind offensichtlich. Der Fall der gleichmässigen Konvergenz ist natürlich als Spezialfall enthalten.
Es ist nicht schwer, Satz 1 zu einer, dem Lebesgueschen Satz ähnlichen Existenzaussage auszubauen. Wir betrachten einen Teilvektorverband $\mathcal{G}$ von $\mathcal{F}(l)$. $(\mathcal{G}, \bar{l}|_{\mathcal{G}})$ ist dann wieder ein Elementarintegral. Wir nennen $\mathcal{G}$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{F}(l)$ genau dann, wenn $\mathcal{G}^{\uparrow} = \mathcal{F}^{\uparrow}$ (und damit natürlich auch $\mathcal{G}^{\downarrow} = \mathcal{F}^{\downarrow}$). Setzt man nun in Satz 1 voraus, dass die Funktionen f_n einem Erzeugendensystem $\mathcal{G}$ von $\mathcal{F}(l)$ angehören und f lediglich $\mathbb{R}^X$ angehört, so findet man mit derselben Beweisidee, dass $f \in \mathcal{F}(l)$ sein muss. Die oben bewiesene Formel bleibt natürlich erhalten. Auf eine weitere, für die Anwendungen nützliche Eigenschaft wollen wir noch hinweisen.

Satz 2: Sei $\mathcal{G}$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{F}(l)$. $\mathcal{H}$ sei eine Menge integrierbarer Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$.
(ii) *Ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monotone Folge aus $\mathcal{H}$ für welche $\{\bar{l}(f_n)\}$ beschränkt ist in $\mathbb{R}$,* so ist $\lim\limits_{n \to \infty} f_n \in \mathcal{H}$.

Dann ist $\mathcal{H} = \mathcal{F}(l)$.
Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Konstruktion des Integrals.
Wir nennen diesen Satz das Induktionsprinzip. In einer allgemeineren Form ist es in [2] behandelt.
Bevor wir zur Diskussion der Konstruktion im Sinne der allgemeinen Forderungen kommen, wollen nur nun einige Fragestellungen kurz anschneiden, die sich im Zusammenhang mit dem Integralbegriff ergeben.

A) *Das Inhaltsproblem.* Wir gehen aus vom Elementarintegral $(\mathcal{A}(n), l_n)$ (Beispiel 3 im ersten Teil). Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heisse integrierbar genau dann, wenn die charakteristische Funktion e_A integrierbar ist. $\mu_n(A) := l_n(e_A)$ nennen wir den Inhalt von A. Wir gelangen damit leicht zu einem Inhaltsbegriff in beliebigen Dimensionen. Die integrierbaren Mengen bilden einen Mengenring, das heisst, mit zwei integrierbaren Mengen A und B sind auch die Mengen $A \cup B$, $A \cap B$ und $A \backslash B$ integrierbar, denn es ist

$$e_{A \cup B} = e_A \vee e_B, \quad e_{A \cap B} = e_A \wedge e_B \quad \text{und} \quad e_{A \backslash B} = e_A - e_{A \cap B}.$$

Die Inhaltsfunktion μ_n ist additiv, positiv und nullstetig, wie sich unmittelbar aus den entsprechenden Eigenschaften des Funktionals l_n ergibt. Auch der obige Konvergenzsatz lässt sich sofort auf die Inhaltsfunktion übertragen. Der Mengenring der integrierbaren Mengen enthält alle beschränkten offenen und alle kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Dies ergibt sich leicht aus der Konstruktion der integrierbaren Funktionen. Eine genauere Charakterisierung geben wir später. Es zeigt sich aber bereits hier, dass man über die Konstruktion zu einem brauchbaren Inhaltsbegriff gelangt.

B) *Uneigentliche Integrale.* Die Einführung dieses Begriffs erübrigt sich. Aus der Konstruktion geht nämlich hervor, dass wir sowohl unbeschränkte Funktionen als auch unbeschränkte Definitionsbereiche in genügendem Umfange berücksichtigen. Die angegebenen Konvergenzsätze beantworten auch gleich die Frage nach der praktischen Berechnung der Integrale solcher Funktionen. Analoge Bemerkungen gelten für die unter A) eingeführten integrierbaren Mengen.

C) *Die praktische Berechnung von Integralen.* Wir betrachten wieder besonders die Situation im $\mathbb{R}^n$. Die Einführung des Integrals auf der Basis der affinen Funktionen liegt sehr nahe bei wichtigen numerischen Integrationsmethoden (Rechteck-Methode, Trapezregel, Simpson-Regel, ..., (siehe [4], [5], [6]). Die Konvergenzsätze ermöglichen eine einfache Behandlung dieser für die Praxis wichtigen Methoden.

D) *Die Vertauschung der Integrationsreihenfolge.* Wir haben bereits im ersten Teil auf dieses Problem hingewiesen. Insbesondere an dieser Stelle zeigt sich die Schwäche des Riemann-Integrals. Wir wollen uns überlegen, was die Konstruktion in diesem Zusammenhang für Möglichkeiten bietet. Dabei genügt es, wenn wir den Fall $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ betrachten.
Es bezeichne $\mathscr{G}$ den von den charakteristischen Funktionen beschränkter Rechtecke des $\mathbb{R}^2$ erzeugten Vektorverband. Dieser Raum ist offenbar ein Erzeugendensystem von $\mathscr{F}(l_2)$. Für Funktionen aus $\mathscr{G}$ ist die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge trivial. Aufgrund der Konvergenzeigenschaften des Integrals und des Induktionsprinzips ergibt sie sich dann aber für alle integrierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^2$. Die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge stellt also im Rahmen der Integrale l_n kein Problem dar. Man beachte auch hier wieder, dass wir die grundlegenden Aussagen gleich auch für unbeschränkte Funktionen und Integrationsbereiche erhalten.

E) *Charakterisierung der integrierbaren Funktionen des* $\mathbb{R}^n$. Wir sind nicht der Auffassung, dass diese im Propädeutikum durchgeführt werden muss. Es genügt sicher, wenn gewisse wichtige Klassen hervorgehoben werden. So zeigt man ohne Schwierigkeiten, dass alle stückweise stetigen Funktionen mit beschränktem Träger integrierbar sind. Eine genauere Untersuchung zeigt folgendes:

Satz 3: Eine Funktion $f \in R^X$ ist genau dann integrierbar, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

(i) f gehört höchstens der ersten Baireschen Klasse an.
(ii) $|f|$ ist nach oben beschränkt durch eine reellwertige, nach unten halbstetige Funktion aus $\mathscr{A}(n)^\uparrow$.

Besitzt eine Funktion diese Eigenschaften, so ist sie punktweiser Limes einer Folge von stetigen Funktionen mit beschränktem Träger, welche den Voraussetzungen des oben formulierten erweiterten Grenzwertsatzes genügt. Die stetigen Funktionen mit beschränktem Träger bilden ein Erzeugendensystem von $\mathscr{F}(l_n)$. Damit ist f integrierbar.
Ist umgekehrt f integrierbar, so ist f von oben approximierbar durch eine Folge integrierbarer, nach unten halbstetiger Funktionen, und analog von unten approximierbar durch eine Folge integrierbarer nach oben halbstetiger Funktionen. Damit genügt f der Bedingung (ii). Es ergibt sich aber weiter aufgrund des Satzes über die Trennbar-

keit halbstetiger Funktionen durch stetige Funktionen auch, dass f punktweiser Limes von stetigen Funktionen mit beschränktem Träger ist. Damit genügt f der Bedingung (i).
Satz 3 zeigt, dass $\mathscr{F}(l_n)$ eine recht umfangreiche Klasse wichtiger Funktionen beinhaltet und sicher für die Zwecke des Propädeutikums ausreicht. Ueber Satz 3 erhält man auch leicht eine Charakterisierung der integrierbaren Mengen. Mehr Information über die hier beschriebenen Funktionen erhält der Leser in [3].

F) *Integration und Differentiation.* Selbstverständlich behalten die im propädeutischen Unterricht durchgeführten Betrachtungen über die elementaren Zusammenhänge zwischen der Integrierbarkeit und der Differenzierbarkeit ihre Bedeutung bei. Sie sind auch ohne Schwierigkeiten mit Hilfe des hier entwickelten Integralbegriffes durchzuführen. Soweit dies die Differenzierbarkeit in ihrer klassischen Bedeutung betrifft, wird man sich natürlich auf die Betrachtung von Stammfunktionen stetiger Funktionen beschränken müssen, denn der Begriff der Differenzierbarkeit fast überall und die sich daraus ergebenden Beziehungen gehören nicht in den elementaren Unterricht. Anderseits kann man aber in gewohnter Weise unbestimmte Integrale definieren, und mann kann sich die Frage stellen, ob dies nicht ein günstiger Ort ist für den ersten Kontakt des Studenten mit dem Begriff der verallgemeinerten Differenzierbarkeit, wenn auch nur im exemplarischen Rahmen. Eine Funktion F heisse verallgemeinert differenzierbar genau dann, wenn sie unbestimmtes Integral einer integrierbaren Funktion f ist. Mit Hilfe der Konvergenzsätze lassen sich leicht die Differentiationsregeln von den stetig differenzierbaren Funktionen auf die verallgemeinert differenzierbaren Funktionen erweitern. Entsprechend verallgemeinert man die Beziehungen der verallgemeinerten Differentiation zur Integration. Auch hier bestehen wieder zahlreiche Anknüpfungspunkte zur höheren Analysis.

G) *Summierbarkeit.* Zum Schluss·wollen wir noch ein paar Bemerkungen anschliessen zur Integration im Rahmen der Elementarintegrale $(\mathscr{F}(X), l_g)$, wobei wir uns auf den Fall der Funktion $g(x) = 1$ beschränken. Es ist leicht zu sehen, dass im Falle des Definitionsbereiches $X = \mathbb{N}$ eine Funktion f genau dann integrierbar ist bezüglich l_g, wenn $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ absolut summierbar ist. Aus den Sätzen über das Integral ergeben sich die Sätze über summierbare Zahlenfolgen. Die Verallgemeinerung auf beliebige Definitionsbereiche X ist für zahlreiche Anwendungen in der Analysis von Bedeutung und gehört sicher in den propädeutischen Unterricht. Zwei Eigenschaften zeichnen dieses Beispiel aus. Erstens zeigt es, dass der Begriff der Integration nicht im beschränkten Rahmen der Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ gesehen werden darf. In diesem Sinne kann das Beispiel der summierbaren Funktionen auch als Motivation für die Begriffsbildungen dienen. Zweitens kann man anhand dieses Beispiels sehr gut die einzelnen Schritte der Konstruktion des Integrals verfolgen. Eine vollständige Behandlung findet man in [2].
Nun müssen wir uns noch überlegen, wie weit wir den Forderungen gerecht werden, die wir im ersten Teil dieser Arbeit aufgestellt haben.

Forderung 1: Wie wir gesehen haben, ist Forderung 1 in vollem Umfange erfüllt. Die Methode ist dimensionsunabhängig und umfasst auch die uneigentlichen Integrale.

Forderung 2: Wir haben bereits erwähnt, dass sich die hier beschriebene Methode ganz an der Daniellschen Konstruktion orientiert. Letztere erfolgt in den hier beschriebenen Schritten mit dem Unterschied, dass im Rahmen des $\bar{\mathbb{R}}^X$ gearbeitet wird, also die Funktionswerte ∞ und $-\infty$ zugelassen werden, und ausserdem die Konvergenz fast überall an die Stelle der punktweisen Konvergenz tritt ([2], [7], [8]). Die hier beschriebene Methode macht den Studenten mit Begriffen und Konstruktionen bekannt, die auch in der allgemeinen Integrationstheorie fundamental sind.
Es bleibt die Frage, warum wir nicht gleich mit der Daniellschen Konstruktion arbeiten wollen. Dazu ist zunächst zu bemerken, dass eine saubere Behandlung der Operationen mit Funktionen aus $\bar{\mathbb{R}}^X$ nicht ohne einen gewissen Aufwand möglich ist. In den gängigen Lehrbüchern wird an dieser Stelle meist etwas «gemogelt». Es werden Konzessionen gemacht, die für den fortgeschrittenen Leser zwar durchaus gerechtfertigt sind, im propädeutischen Unterricht aber nicht Verwendung finden sollten. Dieselbe Bemerkung ist zum Begriff «fast überall» zu machen. Man denke nur an die Schwierigkeiten, die bei einer sauberen Formulierung des Satzes von Fubini in der allgemeinen Integrationstheorie entstehen.
Alle genannten Probleme sind technischer Natur. Es ergeben sich keine Folgen für das Verständnis, wenn sie beim ersten Kontakt mit der Materie eliminiert werden. In späteren Spezialvorlesungen können sie mit Leichtigkeit bewältigt werden, was dort wiederum zu mehr Raum für interessantere Untersuchungen führt.

Forderung 3: Wir haben an mehreren Stellen auf Verbindungen zu anderen Fragestellungen der Analysis hingewiesen. Die Zahl dieser Verbindungen könnte leicht erhöht werden.

Es bleibt uns schliesslich noch das Problem der didaktischen Vertretbarkeit der Methode im Propädeutikum. Das Verfahren bewegt sich sicherlich an der oberen Grenze des im Propädeutikum Durchführbaren. Auf der anderen Seite ist es aber leicht zu motivieren. Die Methode der Approximation von zwei Seiten ist dem Studenten vom Schulunterricht her wohlbekannt. Sie ist ihm dort bei der Berechnung der Inhalte einfacher Gebiete der Ebene und des Raumes begegnet. Basierend auf diesen elementaren Beispielen sollte die Konstruktion mit Erfolg behandelt werden können.

K. Weber, Mathematik-Departement, ETH-Zürich

LITERATUR

1 P. J. Daniell: A general form of integral. Annals of Math. *19* (1918).
2 C. Constantinescu, K. Weber: Integration Theory, Band 1. Wiley, New York 1985.
3 I. P. Natanson: Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen. Akademie-Verlag, Berlin 1969.
4 D. Zermühl: Praktische Mathematik. Springer, Berlin 1965.
5 E. Stiefel: Einführung in die numerische Mathematik. Teubner, Stuttgart 1970.
6 K. Strubecker: Einführung in die höhere Mathematik, Band 3. Oldenbourg, München 1980.
7 H. Michel: Mass- und Integrationstheorie, Band 1. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1978.
8 S. Brehmer: Einführung in die Masstheorie. Akademie-Verlag, Berlin 1975.