Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 41 (1986)

Heft: 5

Rubrik: Aufgaben

To establish an upper bound of the form $H \leq ax+b$, with equality for equilateral triangles which occurs when $x=2$, it is necessary only to determine the equation of the tangent line at the point (2, 3), and this equation is $y=12x-21$: we now have

$$\sum IN_a \leq 12R - 21r. \tag{6}$$

If (6) and the known inequality $\sum AI \leq 2R+2r$, [1] p. 103, is applied to (1), we obtain the inequality

$$\sum n_a \leq 14R - 19r \tag{7}$$

and this is an upper bound for the sequence as desired. We now have $9r \leq \sum h_a \leq \sum g_a \leq \sum w_a \leq \sum m_a \leq \sum n_a \leq 14R - 19r$ with equality throughout when the given triangle is equilateral.

Roland H. Eddy, Memorial University of Newfoundland, St. John's, Newfoundland, Canada

REFERENCES

1 O. Bottema, R. Z. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović and P. M. Vasić: Geometric Inequalities. Wolters-Noordhoff, Groningen 1969.
2 R. H. Eddy: A sequence of inequalities for certain sets of concurrent cevians. El. Math. *35*, 145–146 (1980).
3 Roger A. Johnson: Advanced Euclidean Geometry. Dover Publications Inc. New York 1960.

 0013-6018/86/050128-03$1.50 + 0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 929. Die Folge (a_n) sei definiert durch

$$a_0 = 2, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{3+(-1)^n}{2} \quad (n \geq 0).$$

Man ermittle

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{[(n+1)/2]}}{a_n^2 - 1} \quad ([\ ]: \text{Ganzteilfunktion}).$$

M. Vowe, Therwil

Lösung: Mit vollständiger Induktion zeigt man, dass $a_{4n} = 6n+2$, $a_{4n+1} = 6n+4$, $a_{4n+2} = 6n+5$, $a_{4n+3} = 6n+7$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(6n+2)^2-1} - \frac{1}{(6n+4)^2-1} - \frac{1}{(6n+5)^2-1} + \frac{1}{(6n+7)^2-1} \right].$$

Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right]$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} s&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6n+1}-\frac{1}{6n+4}\right)+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6n+5}-\frac{1}{6n+8}\right)-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6n+3}-\frac{1}{6n+6}\right)\\ &=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+5}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+3}\\ &=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+3}+\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Die Summen der auftretenden Reihen sind bekannt. Man erhält:

$$s=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\pi\sqrt{3}}{9}\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\pi\sqrt{3}}{9}\right)-\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{4},$$

also

$$s=\frac{1}{4}.$$

P. Streckeisen, Zürich

Weitere Lösungen sandten H. Alzer (Waldbröl, BRD), O. Buggisch (Darmstadt, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), K. Dilcher (Halifax, CD), F. Grüter, A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), Kee-wai Lau (Hongkong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), Chr. A. Meyer (Bern), I. Paasche (Stockdorf, BRD), M. Vowe (Therwil; 2. Lösung), K. Warneke (Vechta, BRD), H. Widmer (Rieden), R. Wyss (Flumenthal). Eine Lösung war falsch.

Aufgabe 930. Mit den Bezeichnungen von Aufgabe 899 (El. Math. *39*, 102–103 (1984)) und den Abkürzungen H bzw. G für das harmonische bzw. das geometrische Mittel der drei Innenwinkel gilt die Doppelungleichung

$$(3H/\pi)^3\le 2r/R\le(3G/\pi)^3. \tag{*}$$

Man beweise den linken Teil von (*).

V. D. Mascioni, Origlio

Lösung: Wir beginnen mit der Bemerkung, dass die durch

$$F(x_1,x_2,x_3):=\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)^3(\sin x_1)(\sin x_2)(\sin x_3) \tag{1}$$

definierte positivwertige Funktion in dem in R_+^3 gelegenen Teil der durch die Gleichung $x_1+x_2+x_3=\frac{\pi}{2}$ beschriebenen Ebene offenbar ein absolutes Minimum hat, welches mittels Lagrangescher Multiplikatorenregel bestimmt werden kann. Dazu sind die partiellen Ableitungen von F zu ermitteln, und

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1,x_2,x_3)=(\cot x_i-3x_i^{-2})\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)F(x_1,x_2,x_3)$$

für $i=1,2,3$ zeigt in Verbindung mit der erwähnten Regel, dass sämtliche drei Differenzen $\cot x_i-3x_i^{-2}$ $(i=1,2,3)$ gleich sein müssen. Die im Intervall $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ definierte Funktion $f(x):=\cot x-3x^{-2}$ ist dort wegen

$$f'(x)=\left(\frac{6}{x}-\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\right)x^{-2}>\left(\frac{12}{\pi}-\frac{\pi^2}{4}\right)x^{-2}>0$$

$\left(\text{man beachte } \sin x>\frac{2}{\pi}x \text{ im betrachteten Intervall}\right)$ streng monoton wachsend, weshalb alle x_i einander gleich sein müssen.

Daher ist

$$F(x_1,x_2,x_3)\geq F\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)=\left(\frac{9}{\pi}\right)^3 \tag{2}$$

mit Gleichheit genau für $x_1=x_2=x_3=\frac{\pi}{6}$.

Sind nun α_1, α_2, α_3 die Innenwinkel eines ebenen Dreiecks mit Inkreisradius r und Umkreisradius R, so erhält man aus (2), angewandt mit $x_i:=\frac{1}{2}\alpha_i$ für $i=1,2,3$, mit Rücksicht auf (1)

$$\begin{aligned}\left(\frac{9}{\pi}\right)^3 &\leq F\left(\frac{1}{2}\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{2}\alpha_3\right)=\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}\right)^3\prod_{i=1}^{3}2\sin\frac{1}{2}\alpha_i\\ &=\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}\right)^3\frac{2r}{R},\end{aligned}$$

woraus mit $\left(\frac{3H}{\pi}\right)^3\leq\frac{2r}{R}$ genau die behauptete Ungleichung folgt. Übrigens gilt in ihr das Gleichheitszeichen genau dann, wenn das Dreieck gleichseitig ist.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Weitere Lösungen sandten W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre).

Aufgabe 931. Eine Gerade g_1 verläuft durch den Endpunkt A eines ebenen Dreiecks ABC und schneidet BC im Punkt D. Eine zweite Gerade g_2 schneidet AB, AC, AD bzw. in F, E, G. Es sei $x = \overline{BF}/\overline{FA}$, $y = \overline{CE}/\overline{EA}$, $z = \overline{DG}/\overline{GA}$. Man charakterisiere diejenigen Geradenpaare (g_1, g_2), für welche z a) das arithmetische, b) das harmonische, c) das geometrische Mittel von x und y ist.

G. Bercea, München, BRD

Lösung (Bearbeitung der Redaktion): Der Fall $g_2 \,//\, BC$ ist trivial. Es sei also $g_2 \not\parallel BC$ und $g_2 \cap BC = \{H\}$. Mit $p := \overline{BH}$, $q := \overline{HC}$, $m := \overline{HD}$ lautet nun unsere Behauptung:

$$z = (x+y)/2 \quad \Leftrightarrow \quad m = (p+q)/2 \quad \text{(arithmetisches Mittel)}$$
$$z = \sqrt{x\,y} \quad \Leftrightarrow \quad m = \sqrt{p\,q} \quad \text{(geometrisches Mittel)}$$
$$z = 2x\,y/(x+y) \quad \Leftrightarrow \quad m = 2p\,q/(p+q) \quad \text{(harmonisches Mittel)}\,.$$

Beweis: Nach dem Satz von Menelaos, angewandt auf die Transversale g_2 und die Teildreiecke ABD bzw. ACD, gilt $(x/z)\,(m/p) = 1$ bzw. $(y/z)\,(m/q) = 1$. Daraus ergibt sich $x = p\,z/m$ bzw. $y = q\,z/m$ und somit unmittelbar die Behauptung. Danach ist m und damit g_1 in geläufiger Weise konstruierbar.

K. Warneke, Vechta, BRD

Eine weitere Lösung sandte L. Kuipers (Sierre).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. April 1986* an *Dr. H. Kappus.* Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44), Problem 862A (Band 36, S. 68).

Aufgabe 947. Es bezeichne $F(n)$ die n-te Fibonaccizahl. Man ermittle den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n F(2n+1)}{F(n^2)\,F((n+1)^2)}\,.$$

L. Kuipers, Sierre

Aufgabe 948. Es sei $F \in C^1[0,\infty)$, $F(0)=1$, $F'(x)>0$ für $x \in [0,\infty)$. Man zeige, dass die Funktionalgleichung

$$F(xf(x)) = \frac{f(x)+x}{f(x)-x}$$

eine eindeutig bestimmte Lösung $f \in C^1(0,\infty)$ besitzt, und ermittle $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

P. Meier, Basel

Aufgabe 949. In terms of the basic (or q-) number $[\lambda]$ and basic (or q-) factorial $[n]!$ defined by

$$[\lambda] = \frac{1-q^\lambda}{1-q}; \quad [n]! = [1]\,[2]\,[3] \ldots [n], \quad [0]! = 1\,, \tag{1}$$

let the basic (or q-) binomial coefficient be given by

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \end{bmatrix} = 1\,, \quad \begin{bmatrix} \lambda \\ n \end{bmatrix} = \frac{[\lambda]\,[\lambda-1] \ldots [\lambda-n+1]}{[n]!}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{2}$$

for arbitrary (real or complex) q and λ, $|q|<1$. Also let

$$S_q(\lambda, n; r) = \sum_{i=0}^{n} \left\{ \begin{bmatrix} \lambda+i \\ i \end{bmatrix} r^{-1} - (r-q^{\lambda+1}) \begin{bmatrix} \lambda+i+1 \\ i \end{bmatrix} r^{-i-1} \right\}, \tag{3}$$

where r is a nonzero constant.

Show that

$$S_q(\lambda, n; r) = \frac{q^{\lambda+1}}{r^{n+1}} \begin{bmatrix} \lambda+n+1 \\ n \end{bmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\,. \tag{4}$$

Remark: Since

$$\lim_{q \to 1} \begin{bmatrix} \lambda \\ n \end{bmatrix} = \frac{(\lambda-1) \ldots (\lambda-n+1)}{n!} = \binom{\lambda}{n},$$

a limiting case of (4) when $q \to 1$ would yield problem 904 (see [2]) if we further set $r=2$ and $\lambda = x+n$, x being a real number.

H. M. Srivastava, Victoria, CD

REFERENCES

1 E. Heine: Handbuch der Kugelfunktionen; Theorie und Anwendungen, vol. 1, 2nd ed. G. Reimer, Berlin 1878.

2 L. Kuipers and J. Binz: Aufgabe 904. Elem. Math. *40,* 25–26 (1985).

3 H. M. Srivastava and P. W. Karlsson: Multiple Gaussian Hypergeometric Series. Halsted Press, John Wiley and Sons, New York 1985.