

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 41 (1986)  
**Heft:** 5

**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Natürlich gewinnt man aus (2) analog zu Mortini durch Integration die Ungleichung

$$\left| \int_{-1}^1 f(x) dx \right| \leq \int_0^1 \max_{\theta} |g(x^2 e^{i\theta})| dx, \quad (8)$$

falls das letztere Integral endlich ist. Diese Ungleichung ist aber nicht mehr scharf, wenn nicht über  $g$  spezielle Voraussetzungen gemacht werden. Die Beschränktheit des rechten Integrals in (8) folgt für eine konvexe Funktion, deren Bildgebiet weder eine Halbebene noch ein Parallelstreifen ist, aus der Tatsache, dass das Bildgebiet in diesem Fall in einem Sektor mit Öffnungswinkel  $p\pi$  mit  $p < 1$  liegt. Also gilt nach einer geeigneten Transformation der Form  $g \mapsto Ag + B$  die Beziehung

$g < \left( \frac{1+z}{1-z} \right)^p$  und folglich

$$\int_0^1 \max_{\theta} |g(x^2 e^{i\theta})| dx \leq \int_0^1 \left( \frac{1+x^2}{1-x^2} \right)^p dx \leq 2^p \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^p} < \infty.$$

Prof. Pfluger möchte ich für seine zahlreichen wertvollen Bemerkungen und Anregungen danken.

Wolfram Koepf, Fachbereich Mathematik, FU Berlin

#### LITERATURVERZEICHNIS

1 Ch. Pommerenke: Univalent functions, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1975.

© 1986 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/86/050125-04\$1.50 + 0.20/0

## Kleine Mitteilungen

### An upper bound for a sequence of cevian inequalities

1. In El. Math. Vol. 35/6, the sequence

$$\sum h_a \leq \sum g_a \leq \sum w_a \leq \sum m_a \leq \sum n_a$$

of inequalities for the altitudes, Gergonne cevians, internal angle bisectors, medians, and Nagel cevians respectively of a triangle  $ABC$  is given. The well-known inequality  $9r \leq \sum h_a$ , where  $r$  is the inradius, [1] p. 61, provides a lower bound for the sequence; in this paper we derive an upper bound.

2. In figure 1,  $AN_a = n_a$ ,  $AM_a = m_a$ ,  $AG_a = g_a$ , denote respectively, the Nagel cevian, the median, and the Gergonne cevian to side  $BC$  of a given triangle  $ABC$ . Since the Nagel cevian  $n_a = AN_a$  is the join of the vertex  $A$  and the point of contact  $N_a$  of the corresponding excircle with side  $BC$ , it follows immediately that  $AB + BN_a =$

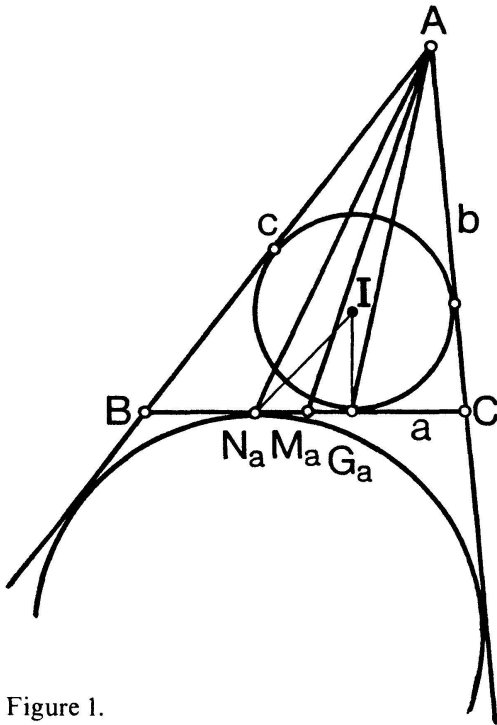


Figure 1.

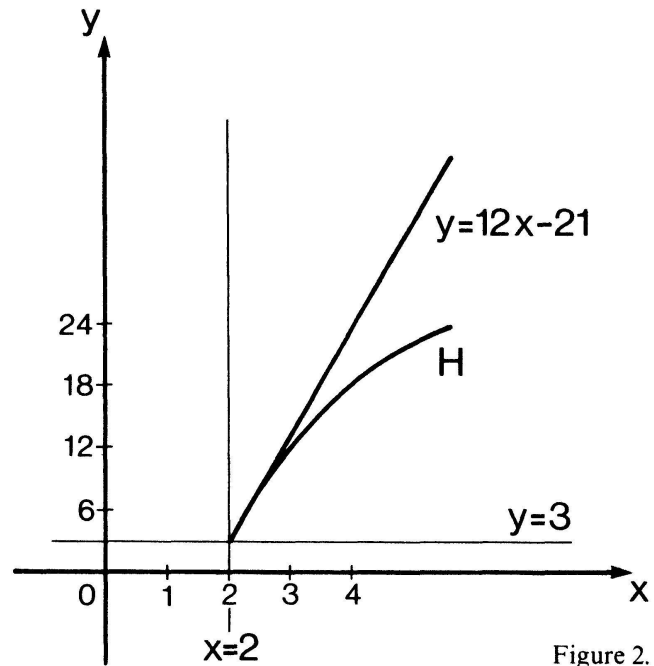


Figure 2.

$N_a C + CA = s$ , hence  $BN_a = s - c$ , where  $s$  represents the semiperimeter of  $ABC$ . Also, since  $n_a$  and  $g_a$  are isotomic lines, [33, pp. 158, 184],  $BN_a = G_a C = s - c$ , hence  $N_a G_a = |b - c|$ .

Let  $I$  denote the incenter, then from figure 1,

$$\sum n_a \leq \sum AI + \sum IN_a. \tag{1}$$

Also,  $IN_a = \sqrt{(b-c)^2 + r^2}$ , with similar expressions for  $IN_b$  and  $IN_c$ , consequently,

$$\sum IN_a = \sum \sqrt{(a-b)^2 + r^2}. \tag{2}$$

Applying the inequality  $x + y + z \leq \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)}$ , [1] p. 11, to (2), we obtain the inequality

$$\sum IN_a \leq \sqrt{6 \sum a^2 - 6 \sum bc + 9r^2}. \tag{3}$$

To (3), we now apply the inequalities  $\sum a^2 \leq 8R^2 + 4r^2$  and  $\sum bc \geq 4r(5R - r)$ , where  $R$  denotes the circumradius, [1] p. 53, and obtain the inequality

$$\sum IN_a \leq \sqrt{48R^2 - 120Rr + 57r^2}. \tag{4}$$

Next, we put the right hand side of (4) equal to  $y$  and make the substitutions  $R = x$ ,  $r = 1$ , this yields the hyperbola

$$H: 3(4x - 5)^2 - y^2 - 18 = 0, \tag{5}$$

the relevant portion of which is sketched in figure 2 above.

To establish an upper bound of the form  $H \leq ax + b$ , with equality for equilateral triangles which occurs when  $x = 2$ , it is necessary only to determine the equation of the tangent line at the point  $(2, 3)$ , and this equation is  $y = 12x - 21$ : we now have

$$\sum IN_a \leq 12R - 21r. \quad (6)$$

If (6) and the known inequality  $\sum AI \leq 2R + 2r$ , [1] p. 103, is applied to (1), we obtain the inequality

$$\sum n_a \leq 14R - 19r \quad (7)$$

and this is an upper bound for the sequence as desired. We now have  $9r \leq \sum h_a \leq \sum g_a \leq \sum w_a \leq \sum m_a \leq \sum n_a \leq 14R - 19r$  with equality throughout when the given triangle is equilateral.

Roland H. Eddy, Memorial University of Newfoundland,  
St. John's, Newfoundland, Canada

#### REFERENCES

- 1 O. Bottema, R. Z. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović and P. M. Vasić: Geometric Inequalities. Wolters-Noordhoff, Groningen 1969.
- 2 R. H. Eddy: A sequence of inequalities for certain sets of concurrent cevians. El. Math. 35, 145–146 (1980).
- 3 Roger A. Johnson: Advanced Euclidean Geometry. Dover Publications Inc. New York 1960.

© 1986 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/86/050128-03\$1.50 + 0.20/0

## Aufgaben

**Aufgabe 929.** Die Folge  $(a_n)$  sei definiert durch

$$a_0 = 2, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{3 + (-1)^n}{2} \quad (n \geq 0).$$

Man ermittle

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{[(n+1)/2]}}{a_n^2 - 1} \quad ([ ]: \text{Ganzteilmfunktion}).$$

M. Vowe, Therwil

**Lösung:** Mit vollständiger Induktion zeigt man, dass  $a_{4n} = 6n + 2$ ,  $a_{4n+1} = 6n + 4$ ,  $a_{4n+2} = 6n + 5$ ,  $a_{4n+3} = 6n + 7$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ .

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{(6n+2)^2-1} - \frac{1}{(6n+4)^2-1} - \frac{1}{(6n+5)^2-1} + \frac{1}{(6n+7)^2-1} \right].$$