Eine Bemerkung zum Schwarzschen Lemma

Autor(en): **Koepf, Wolfram**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **41 (1986)**

Heft 5

PDF erstellt am: **29.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-39477

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

der zuerst Beziehungen für rechtwinklige Dreiecke aufsucht, werden hier sogleich allgemeine Dreiecke betrachtet.

M. Jeger, Mathematik-Departement, ETH-Zürich

LITERATURVERZEICHNIS

1 H. Meschkowski: Die Ableitung der trigonometrischen Formeln im Poincaré-Modell der hyperbolischen Geometrie. El. Math. Vol. 7, 1952, p. 130–132.

© 1986 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/86/050120-06$1.50 + 0.20/0

Eine Bemerkung zum Schwarzschen Lemma

Von R. Mortini (Lösung der Aufgabe 901, El. Math., Vol. 39, 1984, S. 131) und in einem etwas allgemeineren Zusammenhang von A. Pfluger (Varianten des Schwarzschen Lemma, El. Math., Vol. 40, 1985, S. 46–47) ist u. a. folgendes bewiesen worden: Ist die Funktion f in der Einheitskreisscheibe $\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ analytisch mit Werten in $\mathbf{D}$ und ist $f(0) = 0$, so gilt in $\mathbf{D}$ die Ungleichung

$$|f(z) + f(-z)| \leqq 2|z|^2,$$

und für ein $z \in \mathbf{D}\backslash\{0\}$ tritt Gleichheit nur auf, wenn $f(z) = cz$ ist und $c \in \partial\mathbf{D}$. Dieses Resultat soll im folgenden auf den Fall erweitert werden, wo f die Einheitskreisscheibe analytisch in ein konvexes Gebiet der Ebene abbildet.

Es sei g eine in $\mathbf{D}$ konvexe Funktion, d. h. die Funktion $g\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ sei eineindeutig und analytisch und ihr Bildgebiet konvex. Es wird nicht verlangt, dass g normiert, d. h. $g(0) = 0$ und $g'(0) = 1$ sei. Ist weiter die Funktion f in $\mathbf{D}$ analytisch, ist $f(0) = g(0)$ und hat f seine Werte im Bildgebiet von g, so bildet die Funktion $\omega = g^{-1} \circ f$ die Einheitskreisscheibe $\mathbf{D}$ in sich ab und verschwindet im Ursprung. Es hat also f die Darstellung

$$f = g \circ \omega, \tag{1}$$

wobei ω den Voraussetzungen des Schwarzschen Lemma genügt. Immer dann, wenn zwei Funktionen f und g in $\mathbf{D}$ analytisch sind und zwischen ihnen die Beziehung (1) besteht, heisst f zu g subordiniert. Mit der Bezeichnung $\{z \mid |z| < r\} = \mathbf{D}_r$ folgt dann aus (1) und dem Schwarzschen Lemma, dass $f(\mathbf{D}_r) \subset g(\mathbf{D}_r)$ und daher $|f(z)| \leqq \max_\theta |g(z e^{i\theta})|$ ist für jedes r, $0 < r < 1$.

Es gilt der folgende

Satz: Ist eine in $\mathbf{D}$ analytische Funktion f zu einer konvexen Funktion g subordiniert, so gilt

$$\tfrac{1}{2}|f(z) + f(-z)| \leqq \max_\theta |g(z^2 e^{i\theta})|, \qquad z \in \mathbf{D}. \tag{2}$$

Wenn g nicht auf eine Halbebene abbildet, tritt Gleichheit für ein $z \in \mathbf{D}\backslash\{0\}$ dann und nur dann ein, wenn $f(z) = g(c z^2)$ ist und $c \in \partial \mathbf{D}$.

Beweis: Wir setzen $h(z) = \frac{1}{2}(f(z) + f(-z))$. Wegen der Konvexität des Bildgebietes $g(\mathbf{D})$ ist mit f auch h zu g subordiniert. Nun ist aber h eine gerade Funktion, und daher $h(\sqrt{z})$ eine analytische Funktion, die nur Werte von h annimmt. Also ist auch $h(\sqrt{z})$ zu $g(z)$ subordiniert, und somit

$$|h(z)| \leqq \max_{\theta} |g(z^2 e^{i\theta})|, \qquad z \in \mathbf{D}. \tag{3}$$

Nach dem Schwarzschen Lemma gilt Gleichheit in (3) für ein $z \in \mathbf{D}\backslash\{0\}$ nur dann, wenn $\omega(z) = c z$ und daher $h(z) = g(c z^2)$ für ein $c \in \partial \mathbf{D}$ ist oder wegen (1) die Identität

$$g \circ \omega(z) + g \circ \omega(-z) = 2 g(c z^2) \tag{4}$$

gilt. Dies ist für $\omega(z) = c z^2$ offensichtlich der Fall, und es bleibt zu zeigen, dass dies nur für ein solches ω zutrifft, wenn die Funktion g konvex ist, aber nicht auf eine Halbebene abbildet.
Mit den Reihendarstellungen $g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$ und $\omega(z) = \omega_1 z + \omega_2 z^2 + \ldots$ folgt aus (4) durch Koeffizientenvergleich, dass

$$b_1 c = b_2 \omega_1^2 + b_1 \omega_2 \tag{5}$$

ist. Die Funktion $\omega(z)/z$ bildet $\mathbf{D}$ in sich ab und hat in 0 den Wert ω_1. Die Funktion

$$s(z) = \frac{\omega(z)/z - \omega_1}{1 - \bar{\omega}_1 \cdot \omega(z)/z} = \frac{\omega_2}{1 - |\omega_1|^2} z + \ldots$$

genügt also den Voraussetzungen des Schwarzschen Lemma.
Daher ist

$$|s'(0)| = \frac{|\omega_2|}{1 - |\omega_1|^2} \leq 1, \tag{6}$$

und aus (5) folgt dann

$$|b_1| \leqq |b_2|\,|\omega_1|^2 + |b_1|(1 - |\omega_1|^2) \leqq |b_1| + (|b_2| - |b_1|)\,|\omega_1|^2. \tag{7}$$

Für eine in $\mathbf{D}$ konvexe Funktion gelten aber die Koeffizientenungleichungen

$$|b_n| \leqq |b_1|, \qquad n = 2, 3, \ldots,$$

und das Gleichheitszeichen tritt für ein n dann und nur dann auf, wenn g auf eine Halbebene abbildet (siehe z.B. [1], Theorem 2.8). Also ist $|b_2| < |b_1|$ und (7) nur

möglich, wenn $\omega_1 = 0$ und $|\omega_2| = 1 - |\omega_1|^2 = 1$ ist. Aus

$$\omega(z) = \omega_2 z^2 + \dots \quad \text{und} \quad |\omega_2| = 1$$

folgt dann, dass $\omega(z) = c z^2$ sein muss. Dies beendet den Beweis des Satzes.

Bemerkungen. Falls g auf eine Halbebene abbildet, hat (4) auch andere Lösungen ω. Ist z. B. $g(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$, bildet also g auf die rechte Halbebene ab, so ist $b_1 = b_2 = 2$, und (5) besagt dann, dass $\omega_2 + \omega_1^2$ eine Zahl vom Betrag 1 sein muss und folglich in (6) Gleichheit eintritt. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn

$$\omega(z) = \left(\frac{\omega_1}{|\omega_1|}\right)^2 \cdot z \cdot \frac{z + \bar{\omega}_1}{1 + \omega_1 z}, \qquad \omega_1 \in \bar{\mathbf{D}},$$

ist. Dann hat aber $f = g \circ \omega$ die Darstellung

$$f(z) = t\left(\frac{1+yz}{1-yz}\right) + (1-t)\left(\frac{1-yz}{1+yz}\right) \quad \text{für ein} \quad y \in \partial\mathbf{D} \quad \text{und} \quad t \in [\tfrac{1}{2}, 1]$$

durch die Wahl der Bezeichnungen $y := \omega_1/|\omega_1|$ sowie $t := \dfrac{1+|\omega_1|}{2}$, ist also eine spezielle konvexe Linearkombination von Funktionen, die auf die rechte Halbebene abbilden.

Ich möchte ferner bemerken, dass die Voraussetzung der Konvexität von g wesentlich ist. Wählt man nämlich $f(z) = g(z) = \left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^p$, $p > 1$, so ist (2) nicht mehr gültig in $\mathbf{D}$. Denn es ist

$$\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^p + \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^p > 2\left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right)^p \quad \text{für } 0 < r < 1.$$

Dies ist ein Spezialfall der Ungleichung

$$\tfrac{1}{2}(a^p + b^p) - (\tfrac{1}{2}(a+b))^p > 0,$$

wenn $p > 1$ ist und a und b verschiedene positive Zahlen sind, welche leicht folgt, indem man ihre linke Seite bei festem b nach a differenziert.

Es sei darauf hingewiesen, dass in Analogie zu den von Pfluger betrachteten Varianten des Schwarzschen Lemma bei konvexem g die Ungleichungen

$$\frac{1}{n}\,|(f(z) + f(\varepsilon z) + \dots + f(\varepsilon^{n-1} z)| \leqq \max_{\theta} |g(r^n e^{i\theta})|, \quad \varepsilon = e^{2\pi i/n},$$

gleichermassen folgen wie (2). Die Diskussion des Gleichheitszeichens wird jedoch aufwendiger.

Natürlich gewinnt man aus (2) analog zu Mortini durch Integration die Ungleichung

$$\left| \int_{-1}^{1} f(x)\, dx \right| \leqq \int_{0}^{1} \max_{\theta} |g(x^2 e^{i\theta})|\, dx\,, \tag{8}$$

falls das letztere Integral endlich ist. Diese Ungleichung ist aber nicht mehr scharf, wenn nicht über g spezielle Voraussetzungen gemacht werden. Die Beschränktheit des rechten Integrals in (8) folgt für eine konvexe Funktion, deren Bildgebiet weder eine Halbebene noch ein Parallelstreifen ist, aus der Tatsache, dass das Bildgebiet in diesem Fall in einem Sektor mit Öffnungswinkel $p\pi$ mit $p < 1$ liegt. Also gilt nach einer geeigneten Transformation der Form $g \mapsto A g + B$ die Beziehung $g \prec \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^p$ und folglich

$$\int_{0}^{1} \max_{\theta} |g(x^2 e^{i\theta})|\, dx \leqq \int_{0}^{1} \left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^p dx \leqq 2^p \int_{0}^{1} \frac{dx}{(1-x)^p} < \infty\,.$$

Prof. Pfluger möchte ich für seine zahlreichen wertvollen Bemerkungen und Anregungen danken.

Wolfram Koepf, Fachbereich Mathematik, FU Berlin

LITERATURVERZEICHNIS

1 Ch. Pommerenke: Univalent functions, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1975.

© 1986 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/86/050125-04$1.50 + 0.20/0

Kleine Mitteilungen

An upper bound for a sequence of cevian inequalities

1. In El. Math. Vol. 35/6, the sequence

$$\sum h_a \leq \sum g_a \leq \sum w_a \leq \sum m_a \leq \sum n_a$$

of inequalities for the altitudes, Gergonne cevians, internal angle bisectors, medians, and Nagel cevians respectively of a triangle ABC is given. The well-known inequality $9r \leq \sum h_a$, where r is the inradius, [1] p. 61, provides a lower bound for the sequence; in this paper we derive an upper bound.

2. In figure 1, $AN_a = n_a$, $AM_a = m_a$, $AG_a = g_a$, denote respectively, the Nagel cevian, the median, and the Gergonne cevian to side BC of a given triangle ABC. Since the Nagel cevian $n_a = AN_a$ is the join of the vertex A and the point of contact N_a of the corresponding excircle with side BC, it follows immediately that $AB + BN_a =$