

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 41 (1986)  
**Heft:** 5

**Artikel:** Eine Bemerkung zum Schwarzschen Lemma  
**Autor:** Koepf, Wolfram  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-39477>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 26.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

der zuerst Beziehungen für rechtwinklige Dreiecke aufsucht, werden hier sogleich allgemeine Dreiecke betrachtet.

M. Jeger, Mathematik-Departement, ETH-Zürich

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 H. Meschkowski: Die Ableitung der trigonometrischen Formeln im Poincaré-Modell der hyperbolischen Geometrie. El. Math. Vol. 7, 1952, p. 130–132.

© 1986 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/86/050120-06\$1.50 + 0.20/0

## Eine Bemerkung zum Schwarzschen Lemma

Von R. Mortini (Lösung der Aufgabe 901, El. Math., Vol. 39, 1984, S. 131) und in einem etwas allgemeineren Zusammenhang von A. Pfluger (Varianten des Schwarzschen Lemma, El. Math., Vol. 40, 1985, S. 46–47) ist u. a. folgendes bewiesen worden: Ist die Funktion  $f$  in der Einheitskreisscheibe  $\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$  analytisch mit Werten in  $\mathbf{D}$  und ist  $f(0) = 0$ , so gilt in  $\mathbf{D}$  die Ungleichung

$$|f(z) + f(-z)| \leq 2|z|^2,$$

und für ein  $z \in \mathbf{D} \setminus \{0\}$  tritt Gleichheit nur auf, wenn  $f(z) = cz$  ist und  $c \in \partial\mathbf{D}$ . Dieses Resultat soll im folgenden auf den Fall erweitert werden, wo  $f$  die Einheitskreisscheibe analytisch in ein konkaves Gebiet der Ebene abbildet.

Es sei  $g$  eine in  $\mathbf{D}$  konvexe Funktion, d. h. die Funktion  $g: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$  sei eineindeutig und analytisch und ihr Bildgebiet konvex. Es wird nicht verlangt, dass  $g$  normiert, d. h.  $g(0) = 0$  und  $g'(0) = 1$  sei. Ist weiter die Funktion  $f$  in  $\mathbf{D}$  analytisch, ist  $f(0) = g(0)$  und hat  $f$  seine Werte im Bildgebiet von  $g$ , so bildet die Funktion  $\omega = g^{-1} \circ f$  die Einheitskreisscheibe  $\mathbf{D}$  in sich ab und verschwindet im Ursprung. Es hat also  $f$  die Darstellung

$$f = g \circ \omega, \tag{1}$$

wobei  $\omega$  den Voraussetzungen des Schwarzschen Lemma genügt. Immer dann, wenn zwei Funktionen  $f$  und  $g$  in  $\mathbf{D}$  analytisch sind und zwischen ihnen die Beziehung (1) besteht, heißt  $f$  zu  $g$  subordiniert. Mit der Bezeichnung  $\{z \mid |z| < r\} = \mathbf{D}_r$  folgt dann aus (1) und dem Schwarzschen Lemma, dass  $f(\mathbf{D}_r) \subset g(\mathbf{D}_r)$  und daher  $|f(z)| \leq \max_{\theta} |g(z e^{i\theta})|$  ist für jedes  $r$ ,  $0 < r < 1$ .

Es gilt der folgende

**Satz:** Ist eine in  $\mathbf{D}$  analytische Funktion  $f$  zu einer konvexen Funktion  $g$  subordiniert, so gilt

$$\frac{1}{2}|f(z) + f(-z)| \leq \max_{\theta} |g(z^2 e^{i\theta})|, \quad z \in \mathbf{D}. \tag{2}$$

Wenn  $g$  nicht auf eine Halbebene abbildet, tritt Gleichheit für ein  $z \in \mathbf{D} \setminus \{0\}$  dann und nur dann ein, wenn  $f(z) = g(c z^2)$  ist und  $c \in \partial \mathbf{D}$ .

*Beweis:* Wir setzen  $h(z) = \frac{1}{2}(f(z) + f(-z))$ . Wegen der Konvexität des Bildgebietes  $g(\mathbf{D})$  ist mit  $f$  auch  $h$  zu  $g$  subordiniert. Nun ist aber  $h$  eine gerade Funktion, und daher  $h(\sqrt[4]{z})$  eine analytische Funktion, die nur Werte von  $h$  annimmt. Also ist auch  $h(\sqrt[4]{z})$  zu  $g(z)$  subordiniert, und somit

$$|h(z)| \leq \max_{\theta} |g(z^2 e^{i\theta})|, \quad z \in \mathbf{D}. \quad (3)$$

Nach dem Schwarzschen Lemma gilt Gleichheit in (3) für ein  $z \in \mathbf{D} \setminus \{0\}$  nur dann, wenn  $\omega(z) = c z$  und daher  $h(z) = g(c z^2)$  für ein  $c \in \partial \mathbf{D}$  ist oder wegen (1) die Identität

$$g \circ \omega(z) + g \circ \omega(-z) = 2g(c z^2) \quad (4)$$

gilt. Dies ist für  $\omega(z) = c z^2$  offensichtlich der Fall, und es bleibt zu zeigen, dass dies nur für ein solches  $\omega$  zutrifft, wenn die Funktion  $g$  konvex ist, aber nicht auf eine Halbebene abbildet.

Mit den Reihendarstellungen  $g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$  und  $\omega(z) = \omega_1 z + \omega_2 z^2 + \dots$  folgt aus (4) durch Koeffizientenvergleich, dass

$$b_1 c = b_2 \omega_1^2 + b_1 \omega_2 \quad (5)$$

ist. Die Funktion  $\omega(z)/z$  bildet  $\mathbf{D}$  in sich ab und hat in 0 den Wert  $\omega_1$ . Die Funktion

$$s(z) = \frac{\omega(z)/z - \omega_1}{1 - \bar{\omega}_1 \cdot \omega(z)/z} = \frac{\omega_2}{1 - |\omega_1|^2} z + \dots$$

genügt also den Voraussetzungen des Schwarzschen Lemma.

Daher ist

$$|s'(0)| = \frac{|\omega_2|}{1 - |\omega_1|^2} \leq 1, \quad (6)$$

und aus (5) folgt dann

$$|b_1| \leq |b_2| |\omega_1|^2 + |b_1| (1 - |\omega_1|^2) \leq |b_1| + (|b_2| - |b_1|) |\omega_1|^2. \quad (7)$$

Für eine in  $\mathbf{D}$  konvexe Funktion gelten aber die Koeffizientenungleichungen

$$|b_n| \leq |b_1|, \quad n = 2, 3, \dots,$$

und das Gleichheitszeichen tritt für ein  $n$  dann und nur dann auf, wenn  $g$  auf eine Halbebene abbildet (siehe z.B. [1], Theorem 2.8). Also ist  $|b_2| < |b_1|$  und (7) nur

möglich, wenn  $\omega_1 = 0$  und  $|\omega_2| = 1 - |\omega_1|^2 = 1$  ist. Aus

$$\omega(z) = \omega_2 z^2 + \dots \quad \text{und} \quad |\omega_2| = 1$$

folgt dann, dass  $\omega(z) = c z^2$  sein muss. Dies beendet den Beweis des Satzes.

*Bemerkungen.* Falls  $g$  auf eine Halbebene abbildet, hat (4) auch andere Lösungen  $\omega$ . Ist z. B.  $g(z) = \frac{1+z}{1-z}$ , bildet also  $g$  auf die rechte Halbebene ab, so ist  $b_1 = b_2 = 2$ , und (5) besagt dann, dass  $\omega_2 + \omega_1^2$  eine Zahl vom Betrag 1 sein muss und folglich in (6) Gleichheit eintritt. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn

$$\omega(z) = \left( \frac{\omega_1}{|\omega_1|} \right)^2 \cdot z \cdot \frac{z + \bar{\omega}_1}{1 + \omega_1 z}, \quad \omega_1 \in \bar{\mathbf{D}},$$

ist. Dann hat aber  $f = g \circ \omega$  die Darstellung

$$f(z) = t \left( \frac{1+yz}{1-yz} \right) + (1-t) \left( \frac{1-yz}{1+yz} \right) \quad \text{für ein } y \in \partial \mathbf{D} \quad \text{und} \quad t \in [\frac{1}{2}, 1]$$

durch die Wahl der Bezeichnungen  $y := \omega_1 / |\omega_1|$  sowie  $t := \frac{1+|\omega_1|}{2}$ , ist also eine spezielle konvexe Linearkombination von Funktionen, die auf die rechte Halbebene abbilden.

Ich möchte ferner bemerken, dass die Voraussetzung der Konvexität von  $g$  wesentlich ist. Wählt man nämlich  $f(z) = g(z) = \left( \frac{1+z}{1-z} \right)^p$ ,  $p > 1$ , so ist (2) nicht mehr gültig in  $\mathbf{D}$ . Denn es ist

$$\left( \frac{1+r}{1-r} \right)^p + \left( \frac{1-r}{1+r} \right)^p > 2 \left( \frac{1+r^2}{1-r^2} \right)^p \quad \text{für } 0 < r < 1.$$

Dies ist ein Spezialfall der Ungleichung

$$\frac{1}{2}(a^p + b^p) - (\frac{1}{2}(a+b))^p > 0,$$

wenn  $p > 1$  ist und  $a$  und  $b$  verschiedene positive Zahlen sind, welche leicht folgt, indem man ihre linke Seite bei festem  $b$  nach  $a$  differenziert.

Es sei darauf hingewiesen, dass in Analogie zu den von Pfluger betrachteten Varianten des Schwarzschen Lemma bei konvexem  $g$  die Ungleichungen

$$\frac{1}{n} |(f(z) + f(\varepsilon z) + \dots + f(\varepsilon^{n-1} z))| \leq \max_{\theta} |g(r^n e^{i\theta})|, \quad \varepsilon = e^{2\pi i/n},$$

gleichermassen folgen wie (2). Die Diskussion des Gleichheitszeichens wird jedoch aufwendiger.

Natürlich gewinnt man aus (2) analog zu Mortini durch Integration die Ungleichung

$$\left| \int_{-1}^1 f(x) dx \right| \leq \int_0^1 \max_{\theta} |g(x^2 e^{i\theta})| dx , \quad (8)$$

falls das letztere Integral endlich ist. Diese Ungleichung ist aber nicht mehr scharf, wenn nicht über  $g$  spezielle Voraussetzungen gemacht werden. Die Beschränktheit des rechten Integrals in (8) folgt für eine konvexe Funktion, deren Bildgebiet weder eine Halbebene noch ein Parallelstreifen ist, aus der Tatsache, dass das Bildgebiet in diesem Fall in einem Sektor mit Öffnungswinkel  $p\pi$  mit  $p < 1$  liegt. Also gilt nach einer geeigneten Transformation der Form  $g \mapsto Ag + B$  die Beziehung  $g < \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^p$  und folglich

$$\int_0^1 \max_{\theta} |g(x^2 e^{i\theta})| dx \leq \int_0^1 \left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^p dx \leq 2^p \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^p} < \infty .$$

Prof. Pfluger möchte ich für seine zahlreichen wertvollen Bemerkungen und Anregungen danken.

Wolfram Koepf, Fachbereich Mathematik, FU Berlin

#### LITERATURVERZEICHNIS

1 Ch. Pommerenke: Univalent functions, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1975.

© 1986 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/86/050125-04\$1.50 + 0.20/0

## Kleine Mitteilungen

### An upper bound for a sequence of cevian inequalities

1. In El. Math. Vol. 35/6, the sequence

$$\sum h_a \leq \sum g_a \leq \sum w_a \leq \sum m_a \leq \sum n_a$$

of inequalities for the altitudes, Gergonne cevians, internal angle bisectors, medians, and Nagel cevians respectively of a triangle  $ABC$  is given. The well-known inequality  $9r \leq \sum h_a$ , where  $r$  is the inradius, [1] p. 61, provides a lower bound for the sequence; in this paper we derive an upper bound.

2. In figure 1,  $AN_a = n_a$ ,  $AM_a = m_a$ ,  $AG_a = g_a$ , denote respectively, the Nagel cevian, the median, and the Gergonne cevian to side  $BC$  of a given triangle  $ABC$ . Since the Nagel cevian  $n_a = AN_a$  is the join of the vertex  $A$  and the point of contact  $N_a$  of the corresponding excircle with side  $BC$ , it follows immediately that  $AB + BN_a =$