# Ein Kettenkomplex auf geordneten Tupeln

Autor(en): **Bier, Thomas / Seidel, Christoph**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **41 (1986)**

Heft 5

PDF erstellt am: **29.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-39475

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

stellt. Beispiel 1 gehört ebenfalls in diesen Rahmen. Man hat nur $X$ mit der diskreten Topologie zu versehen. Die Funktionale $l_g$ sind also ebenfalls alle nullstetig.
Die positiven linearen Funktionale $l_n$ und $l_g$ treten auf natürliche Weise im propädeutischen Unterricht in Erscheinung. Im allgemeinen wird aber dort leider auf die Gemeinsamkeiten kein Gewicht gelegt. Strukturell gehören sie jedoch in denselben Rahmen. Dementsprechend zeigen sich grosse Analogien hinsichtlich der mit ihnen verbundenen Problemstellungen. Mit einem fundamentalen Problem, nämlich der Erweiterung solcher Funktionale befassen wir uns im zweiten Teil dieser Arbeit.

K. Weber, Mathematik-Departement ETH-Zürich

LITERATURVERZEICHNIS

1 Serret-Scheffers: Lehrbuch der Differential und Integralrechnung, Band 2. Teubner, Leipzig 1915.
2 G. M. Fichtenholz: Differential- und Integralrechnung. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1964.
3 M. Barner, F. Flohr: Analysis. W. de Gruyter, Berlin 1983.
4 H. Heuser: Lehrbuch der Analysis. Teubner, Stuttgart 1982.
5 P. J. Daniell: A general form of integral. Annals of Math. *19*, 1917–1918.
6 C. Constantinescu, K. Weber: Integration Theory, Band 1. Wiley, New York 1985.
7 B. Angerer, H. Bauer: Mehrdimensionale Integration. Sammlung Göschen, 2121. W. de Gruyter, Berlin 1976.
8 E. Hewitt, K. Stromberg: Real and Abstract Analysis. Springer, Berlin 1975.
9 H. Hadwiger: Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Springer, Berlin 1957.
10 Enzyklopädie der Elementarmathematik, Band 5. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1971.

© 1986 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/86/050107-10$1.50 + 0.20/0

# Ein Kettenkomplex auf geordneten Tupeln

## Einleitung

Ein Kettenkomplex $C(n)$, dessen $q$-te Kettengruppe von allen angeordneten $q$-Tupeln $(i_1, i_2, \ldots, i_q)$ mit $i_j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ und $i_j \neq i_k$ für $j \neq k$ frei abelsch erzeugt wird, wird definiert. Dann wird gezeigt, dass der Komplex azyklisch bis zur Dimension $n$ ist.
In Gruppentheorie und Kombinatorik wurde seit einigen Jahren ein Kettenkomplex betrachtet, dessen formale Definition sich von derjenigen des $n$-Simplex nur darin unterscheidet, dass man statt (ungeordneten) Teilmengen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ nun (geordnete) Tupel nimmt. Die einzige uns bekannte schriftlich niedergelegte Definition (einer mod-2-Version) dieses Kettenkomplexes befindet sich in einem Manuskript von W. Mielants [1], Seite 39ff.; der Kettenkomplex wurde aber auch von H. Hiller und L. Scott betrachtet. Da die Definition des Komplexes dem $n$-Simplex analog ist, eine elementare Betrachtung der Eulercharakteristik aber sofort zeigt, dass der Komplex nicht azyklisch sein kann, wird man sofort zu der Vermutung geführt, dass der Komplex «sphärisch» ist, d.h. nur die höchste Homologiegruppe nicht verschwindet. Diese Vermutung von L. Smith, H. Hiller und L. Scott wird im folgenden (mit vollständig elementaren Mitteln) gezeigt. Wir danken L. Smith mehr für die Mitteilung

des Problems als für sein äusserst beharrliches Interesse. Für die benutzten Begriffe aus der Theorie der Komplexe sei auf das Buch von S. Lang, Algebra (Kap. IV), verwiesen.

## Definition des Kettenkomplexes $C(n)$

Sei $C_q(n)$ die freie abelsche Gruppe, die von allen $q$-Tupeln der Form $(i_1, \ldots, i_q)$ mit $i_j \in \{1, \ldots, n\}$ und $i_j \neq i_k$ erzeugt wird. Offenbar ist $C_q(n)$ vom Rang $\frac{n!}{(n-q)!}$. Randabbildungen $\partial_q$: $C_q(n) \to C_{q-1}(n)$ sind durch die Formel

$$\partial_q(i_1, \ldots, i_q) = \sum_{j=1}^{q} (-1)^{j+1} (i_1, \ldots, \hat{i}_j, \ldots, i_q) \tag{1}$$

als Abbildungen auf den erzeugenden Elementen von $C_q(n)$ definiert. Wir setzen noch $C_0(n) = \mathbf{Z}$ und $\partial_1(i) = 1$ für $i = 1, \ldots, n$. Es gilt $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$. Sei $H_q(C(n)) = \operatorname{Ker} \partial_q / \operatorname{Im} \partial_{q+1}$ die *Homologie* des Kettenkomplexes $C(n)$. Weiterhin definieren wir für $1 \leq k \leq n$ $\psi_n(k)$ als die Anzahl aller Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$, deren Fixpunktmenge in der Menge $\{1, \ldots, k\}$ enthalten ist. Für $k = 0$ definieren wir $\psi_n(0)$ als die Anzahl aller Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$ ohne Fixpunkte.

## Die Homologie des Kettenkomplexes $C(n)$

Mit den obigen Bezeichnungen gilt

**Satz 1.**

$$H_q(C(n)) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad q \neq n \\ \mathbf{Z}^{\psi_n(0)} & \text{für} \quad q = n. \end{cases}$$

Beweis: Zunächst betrachten wir den durch die exakte Sequenz

$$0 \to C(n-1) \to C(n) \to Q(n) \to 0 \tag{2}$$

definierten Kettenkomplex $Q(n)$. Man sieht leicht, dass $Q_q(n)$ eine $\mathbf{Z}$-Basis hat, die aus denjenigen Tupeln $(i_1, \ldots, i_q)$ besteht, so dass eins der $i_j = n$ ist. Man definiert nun einen Unterkomplex $U(n)$, indem man fordert, dass $U_q(n)$ genau diejenigen Tupel $(i_1, \ldots, i_q)$ als Basis hat, die $i_j = n$ für ein $j$ und für alle $k \neq j$ $i_k \in \{1, \ldots, n-2\}$ erfüllen. Mit den offensichtlichen Randabbildungen sieht man leicht, dass $U(n)$ ein Unterkomplex von $Q(n)$ ist. Dann betrachten wir den durch die exakte Sequenz

$$0 \to U(n) \to Q(n) \to Q^2(n) \to 0 \tag{3}$$

definierten Kettenkomplex und verfahren so induktiv weiter fort. Wir erhalten dann Kettenkomplexe $U^i(n)$ und $Q^i(n)$, deren $q$-te Kettengruppen die folgenden Basen haben: Eine Basis von $Q^i_q(n)$ ist durch alle $(i_1 \dots i_q)$ mit $i_{j_1}=n$, $i_{j_2}=n-1$, ..., $i_{j_i}=n-i+1$ gegeben.
Eine Basis von $U^i(n)$ ist durch alle Tupel $(i_1,\dots,i_q)$ mit $i_{j_1}=n$, $i_{j_2}=n-1$, ..., $i_{j_i}=n-i+1$ und $i_k \in \{1,\dots,n-i-1\}$ für $k \neq j_s$ gegeben.
Die Randabbildungen $\partial_q\colon Q^i_q(n) \to Q^i_{q-1}(n)$ bzw. $U^i_q(n) \to U^i_{q-1}(n)$ sind durch die Formel

$$\partial_q(i_1 \dots i_q) = \sum_{j=1}^{q}{}^{*} (-1)^{j+1} (i_1,\dots,\hat{i}_j,\dots,i_q) \tag{4}$$

gegeben, wobei das Symbol $\sum^*$ so zu verstehen ist, dass alle die Tupel Null gesetzt werden, die nicht in dem entsprechenden Komplex $Q^i_q(n)$ oder $U^i_q(n)$ vorkommen.
Man erhält somit induktiv eine kurz-exakte Folge von Kettenkomplexen

$$0 \to U^i(n) \xrightarrow{j} Q^i(n) \xrightarrow{p} Q^{i+1}(n) \to 0\,. \tag{5}$$

Zunächst berechnen wir die Homologie des Komplexes $Q^n(n)$. Das ist sehr leicht, denn aufgrund seiner Definition hat der Komplex $Q^n(n)$ nur eine nichtverschwindende Kettengruppe vom Rang $n!$ in Dimension $n$. Also ist

$$H_q(Q^n(n)) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad q \neq n \\ \mathbf{Z}^{n!} & \text{für} \quad q = n\,. \end{cases}$$

Nun beweisen wir durch absteigende Induktion nach $i$ die folgende Behauptung:

$$H_q(Q^i(n)) = 0 \quad \text{für} \quad q < n\,.$$

Beweis der Behauptung: Wir nehmen an, dass die Behauptung für $i+1$ bewiesen ist, und schreiben die lange exakte Homologiesequenz der Sequenz (5) hin (siehe [2]).

$$\begin{aligned} 0 &\to H_n(U^i(n)) \xrightarrow{j_*} H_n(Q^i(n)) \xrightarrow{p_*} H_n(Q^{i+1}(n)) \\ &\to H_{n-1}(U^i(n)) \xrightarrow{j_*} H_{n-1}(Q^i(n)) \to \dots \to H_q(U^i(n)) \\ &\xrightarrow{j_*} H_q(Q^i(n)) \xrightarrow{p_*} H_q(Q^{i+1}(n)) \dots \end{aligned} \tag{7}$$

Die Abbildung $j$ ist auf dem Homologieniveau die Nullabbildung; denn für einen Zykel $z \in U^i_q(n)$ mit der Darstellung

$$z = \sum_I a_I(i_1,\dots,i_q)\,, \qquad a_I \in \mathbf{Z} \tag{8}$$

hat man, dass alle $i_j \neq n-i$ sind. Dann ist aber der Zykel $j(z)$ der Rand des Ausdrucks

$$\sum_I a_I(i_1,\dots,i_q,n-i) \mod \partial Q^{i+1}_{q+1}(n) \tag{9}$$

wie man mit der Formel (4) nachprüft.

Spaltet man die lange exakte Sequenz (7) entsprechend auf in kurz exakte Sequenzen

$$0 \to H_q(Q^i(n)) \to H_q(Q^{i+1}(n)) \to H_{q-1}(U^i(n)) \to 0 \tag{10}$$

für $1 \leq q \leq n$, so folgt die Behauptung aus der Induktionsvoraussetzung. Damit ist der Beweis der Behauptung geführt.
Offenbar beinhaltet die Behauptung für den Fall $i=0$ auch schon den ersten Teil des Satzes. Der zweite Teil des Satzes folgt dann durch Betrachtung der Eulercharakteristik (siehe [2]).
Wir wollen abschliessend noch die Homologie der Komplexe $Q^i(n)$ angeben.

**Satz 2.**

$$H_q(Q^i(n)) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad q \neq n \\ \mathbf{Z}^{\psi_n(i)} & \text{für} \quad q = n\,. \end{cases}$$

Beweis: Der erste Teil wurde schon gezeigt. Den zweiten Teil beweisen wir durch Induktion nach $n$ und $i$. Für kleines $n$, etwa $n=1$ ist die Aussage von Satz 2 für alle $i$ richtig. Aus den Sequenzen (10) und Satz 1 folgt

$$H_q(U^i(n)) = 0 \quad \text{für} \quad q < n-1\,. \tag{11}$$

Durch Abzählen der Basen in den beiden Komplexen findet man ausserdem

$$rg\,(U_q^i(n)) = rg\,(Q_q^i(n-1)) \tag{12}$$

für alle $q$.
Daraus ergibt sich mit (11) und der Eulercharakteristik, dass

$$H_{n-1}(U^i(n)) \cong H_{n-1}(Q^i(n-1) \cong \mathbf{Z}^{\psi_{n-1}(i)}\,. \tag{13}$$

Absteigende Induktion nach $i$ liefert als Induktionsvoraussetzung

$$H_n(Q^{i+1}(n)) \cong \mathbf{Z}^{\psi_n(i+1)}\,. \tag{14}$$

Mit (13) und (14) entnimmt man dann aus (10) mit $q=n$

$$H_n(Q^i(n)) \cong \mathbf{Z}^{\psi_n(i+1)-\psi_{n-1}(i)}\,.$$

Damit folgt auch der zweite Teil von Satz 2.

Thomas Bier und Christoph Seidel

LITERATURVERZEICHNIS

1 W. Mielants: $Z_2$-Cohomology of finite groups of automorphisms. Unveröffentlichte Vorlesungsausarbeitung. State University of Ghent 1978, Belgien.
2 S. Lang: Algebra. Addison-Wesley, 1965.

© 1986 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/86/050116-04$1.50 + 0.20/0