Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 41 (1986)

Heft: 5

Artikel: Gedanken zum Integralbegriff im propädeutischen Unterricht. Teil 1, Elementarintegrale

Autor: Weber, K.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39474

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

El. Math. Vol. 41 Nr. 5 Seiten 107–138 Basel, den 10. September 1986

Gedanken zum Integralbegriff im propädeutischen Unterricht Teil 1: Elementarintegrale

Wer die Entwicklungen im Mathematikunterricht an Mittel- und Hochschulen in den letzten Jahrzehnten aufmerksam verfolgt, wird erstaunt feststellen, dass zum Teil gewaltige Aenderungen in Methodik und Auffassung im algebraischen und geometrischen Bereich eher kleine Umgestaltungen im Bereich der Analysis gegenüberstehen. In letzter Zeit ist nun vermehrt die Forderung nach Veränderungen auch in diesem Fach laut geworden. Dabei wird in erster Linie von anwendungsorientierter Seite die Einbeziehung Computer-gerechter Verfahren gefordert. Diesem Wunsch ist sicher nichts entgegenzuhalten. Dann kommt man allerdings um die Frage nicht herum, mittels welcher Massnahmen die erforderliche Zeit gewonnen werden kann. Auf keinen Fall dürfen die Umstrukturierungen in der Weise erfolgen, dass der an sich veraltete Analysis-Unterricht inhaltlich gekürzt, ansonsten aber in seiner bestehenden Form beibehalten wird. Sowohl an der Mittelschule als auch and der Hochschule sollte der mathematische Gehalt dieses Faches nicht verringert werden. Dies kann nur auf die Weise realisiert werden, dass dem Einbau neuer Gebiete eine Vergrösserung der Effektivität des Unterrichtes in den klassischen Fragestellungen parallel läuft, was durch die Einführung neuer Methoden und Betrachtungsweisen durchaus erreichbar ist.

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit dem Integralbegriff im Propädeutikum des Mathematikunterrichtes an der Hochschule. Zwei verschiedene Problemstellungen führen in bekannter Weise zu diesem Begriff: einerseits die Frage nach der Existenz einer Stammfunktion zu einer gegebenen Funktion, anderseits das Inhaltsproblem. Wir behandeln in der vorliegenden Arbeit in erster Linie den zweiten Aspekt. Naturgemäss nimmt die Behandlung des Inhaltsproblems wesentlich mehr Zeit in Anspruch als die der Stammfunktion.

Die Entwicklung des Integralbegriffes im Hochschulunterricht erfolgt seit Jahrzehnten fast ausschliesslich in folgenden Schritten ([1], [2], [3], [4]).

Schritt 1: Einführung des Integrals für eine Klasse einfacher Funktionen einer reellen Variablen.

Schritt 2: Behandlung uneigentlicher Integrale auf der Basis von Schritt 1.

Schritt 3: Entwicklung einer Theorie der mehrdimensionalen Integrale auf der Basis von Schritt 1.

Schritt 4: Einführung des Lebesgueschen Integralbegriffes. Mit Schritt 4 ist oft eine starke Abstraktion der Fragestellung verbunden, indem eine allgemeine Mass- und

Integrationstheorie auf abstrakten Räumen entwickelt wird, welche auch den Anforderungen anderer Gebiete, z. B. der Wahrscheinlichkeitstheorie, gerecht wird.
Der Aufbau in diesen vier Schritten erfordert enorm viel Zeit. Dies hat ganz verschiedene Ursachen. Der Hauptgrund aber wird sofort klar, wenn man vom Standpunkt von Schritt 4 aus die ersten drei Schritte betrachtet: die elementaren Integralbegriffe haben grosse strukturelle Schwächen. Darauf weist schon der Begriff des «uneigentlichen Integrals» hin. Er erweist sich vom allgemeinen Standpunkt her als ziemlich unnötig. Die uneigentliche Integrierbarkeit absolut integrierbarer Funktionen ist durch Schritt 4 völlig abgedeckt, und die Betrachtung nicht absolutintegrierbarer Funktionen ist von so geringer Bedeutung im elementaren Unterricht, dass darauf ohne Verluste verzichtet werden kann.
Eine weitere Schwäche zeigt sich bei der Frage nach Stetigkeitseigenschaften. Während diese Frage beim Lebesgue-Integral durch den Lebesgueschen Konvergenzsatz in befriedigender Weise gelöst ist, erweist sie sich bei den elementaren Begriffen als kompliziert, wenn man sich nicht auf die für praktische Zwecke ungenügende gleichmässige Konvergenz beschränken will.
Nicht unerwähnt bleiben darf das Problem der Vertauschung der Integrationsreihenfolge im Rahmen der mehrdimensionalen Integration. Auch dieses Problem wird erst in Schritt 4 befriedigend gelöst.
Während der Entwicklung im Rahmen der ersten drei Schritte wird der Student laufend mit Schwierigkeiten konfrontiert, die viel eher im Aufbau des Unterrichtes als in der mathematischen Natur des Problems begründet sind. Als Folge davon geht er Schritt 4 mit Vorstellungen an, die dem Verständnis oft hinderlich sind. Die Schwierigkeiten werden bei der Behandlung der abstrakten Integrationstheorie noch dadurch verstärkt, dass im elementaren Unterricht der für die abstrakten Betrachtungen notwendige strukturelle Hintergrund in keiner Weise beleuchtet wird.
Aufgrund dieser Betrachtungen kommt der Autor zum Schluss, dass die Entwicklung des Integralbegriffes im Propädeutikum eine der Stellen ist, an der eine Neuorientierung Aussicht auf Erfolg hat, ja sich geradezu aufdrängt.
Im Anschluss an die Diskussion der Schwächen der ersten drei Schritte kann folgender Katalog von Forderungen an einen neuen Aufbau des Integralbegriffes im Unterricht aufgestellt werden.

1. Zusammenfassung der drei ersten Schritte. Insbesondere sollte die Einführung uneigentlicher Integrale nicht mehr notwendig sein. Wünschenswert wäre eine einheitliche Behandlung der Integrale in beliebigen Dimensionen.
2. Die Entwicklungen sollten strukturell in einem Rahmen erfolgen, der auch bei der Abstraktion in Schritt 4 als Basis dienen kann. Die wichtigsten Eigenschaften des abstrakten Integrals sollten bereits im elementaren Bereich andeutungsweise sichtbar sein. Die elementaren Entwicklungen sollten den Weg für Verallgemeinerungen vorspuren.
3. Die Entwicklungen sollten in einer Form durchgeführt werden, welche Beziehungen zu anderen Fragestellungen der Analysis erkennen lässt.

Selbstverständlich existieren Integralbegriffe, welche allen drei Forderungen gerecht werden. Wir erwähnen insbesondere den 1918 von Daniell entwickelten ([5], [6]). Eine vierte Forderung stellt sich allerdings solchen allgemeinen Ueberlegungen entgegen, nämlich diejenige der didaktischen Vertretbarkeit. Wir wollen nun aber zeigen, dass

ein elementares Analogon zur Daniellschen Integrationstheorie existiert, welches den Forderungen 1.–3. ebenfalls gerecht wird. Dabei sind die folgenden Betrachtungen absichtlich so elementar wie möglich gehalten. Es geht uns hier nicht um grosse wissenschaftliche Erkenntnisse, sondern um eine effizientere Gestaltung des propädeutischen Unterrichtes.
Mit aller Deutlichkeit sei festgehalten, dass die vorliegende Arbeit als Diskussionsbeitrag aufgefasst wird und nicht etwa als Musterlösung. Es gibt keinen Königsweg im Unterricht. Verschiedene Möglichkeiten müssen sorgfältig gegeneinander abgewogen werden. Der Autor ist sich auch des Wagnisses bewusst, jahrzehntelang bewährte Unterrichts-Inhalte in Frage zu stellen. Wenn es hier dennoch vielleicht sogar in etwas herausfordernder Weise geschieht, so aus der Ueberzeugung heraus, dass eine ernsthafte Diskussion heute wirklich die Aussicht auf wirkungsvolle Neugestaltungen eröffnet.

1. Vektorverbände von Funktionen

Wir behandeln zunächst diejenigen Strukturen, die uns als Definitionsbereiche von Integralen dienen. Es bezeichne X eine Menge und $\mathbb{R}^X$ die Menge aller reellen Funktionen auf X. Neben der Vektorraumstruktur von $\mathbb{R}^X$ interessiert von Standpunkt der Integralkonstruktion her vor allem die im propädeutischen Unterricht oft stiefmütterlich behandelte Ordnungsstruktur. Sie ist gegeben durch die Definition

$$f \leq g :\Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \quad \text{für alle } x \in X .$$

Wir fassen einige Eigenschaften der Relation $\leq$ zusammen. Sie ergeben sich unmittelbar durch «punktweise» Anwendung der entsprechenden Eigenschaften der Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}$.

(a) $\leq$ ist eine Halbordnungsrelation auf $\mathbb{R}^X$. $\mathbb{R}^X$ ist bezüglich dieser Relation ein beschränkt vollständiger Verband. Für jede nicht leere beschränkte Teilmenge $\mathcal{F}$ von $\mathbb{R}^X$ existiert also das Supremum $\bigvee_{f \in \mathcal{F}} f$ und das Infimum $\bigwedge_{f \in \mathcal{F}} f$ bezüglich $\leq$. Für alle $x \in X$ gilt $\left(\bigvee_{f \in \mathcal{F}} f\right)(x) = \sup_{f \in \mathcal{F}} f(x)$ und $\left(\bigwedge_{f \in \mathcal{F}} f\right)(x) = \inf_{f \in \mathcal{F}} f(x)$, wobei sup bzw. inf Suprema bzw. Infima in $\mathbb{R}$ bezeichnen.

Wir schreiben im folgenden $f \vee g$ bzw. $f \wedge g$ für das Supremum bzw. das Infimum zweier Funktionen f, g aus $\mathbb{R}^X$.

(b) $\mathbb{R}^X$ ist vollständig distributiv. Für jede nicht leere beschränkte Teilmenge $\mathcal{F}$ von $\mathbb{R}^X$ und für beliebige $g \in \mathbb{R}^X$ gilt also

$$\left(\bigvee_{f \in \mathcal{F}} f\right) \wedge g = \bigvee_{f \in \mathcal{F}} (f \wedge g), \qquad \left(\bigwedge_{f \in \mathcal{F}} f\right) \vee g = \bigwedge_{f \in \mathcal{F}} (f \vee g) .$$

(c) Für alle $f, g \in \mathbb{R}^X$ gilt

$$f \vee g + f \wedge g = f + g .$$

Ist $\mathscr{F}$ eine beschränkte nicht leere Teilmenge von $\mathbb{R}^X$, so gilt

$$\left(\bigvee_{f\in\mathscr{F}} f\right)+g=\bigvee_{f\in\mathscr{F}}(f+g)\,,\qquad \left(\bigwedge_{f\in\mathscr{F}} f\right)+g=\bigwedge_{f\in\mathscr{F}}(f+g)$$

für alle $g\in\mathbb{R}^X$,

$$\alpha\left(\bigvee_{f\in\mathscr{F}} f\right)=\bigvee_{f\in\mathscr{F}}(\alpha f)\,,\qquad \alpha\left(\bigwedge_{f\in\mathscr{F}} f\right)=\bigwedge_{f\in\mathscr{F}}(\alpha f)$$

für alle $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\geq 0$ und

$$\bigvee_{f\in\mathscr{F}} f=-\left(\bigwedge_{f\in\mathscr{F}}(-f)\right),\qquad \bigwedge_{f\in\mathscr{F}} f=-\left(\bigvee_{f\in\mathscr{F}}(-f)\right).$$

Wichtig für die Konstruktionen ist der Begriff der monotonen Folge von Funktionen. Wir nennen eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{R}}$ aus $\mathbb{R}^X$ wachsend genau dann, wenn $f_n\leq f_{n+1}$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Sie heisst fallend genau dann, wenn $f_n\geq f_{n+1}$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Sie heisst monoton genau dann, wenn sie wachsend oder fallend ist.

(d) Jede wachsende beschränkte Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{R}^X$ konvergiert punktweise gegen $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Sind $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei wachsende beschränkte Folgen aus $\mathbb{R}^X$ und bezeichnet f bzw. g ihr Supremum, so gilt

$$f+g=\bigvee_{n\in\mathbb{N}}(f_n+g_n)\,,\qquad f\vee g=\bigvee_{n\in\mathbb{N}}(f_n\vee g_n)\,,\qquad f\wedge g=\bigvee_{n\in\mathbb{N}}(f_n\wedge g_n)\,.$$

Analoge Aussagen gelten für fallende Folgen.

Für jede Funktion $f\in\mathbb{R}^X$ ist der Betrag $|f|$ definiert durch $|f|(x):=|f(x)|$ für alle $x\in X$. Man definiert $f_+:=f\vee 0$ und $f_-:=(-f)\vee 0$. f_+ heisst der positive Teil von f, f_- nennt man den negativen Teil. Für alle $f\in\mathbb{R}^X$ gilt $|f|=f_++f_-$ und $f=f_+-f_-$.

Eine Teilmenge $\mathscr{F}$ von $\mathbb{R}^X$ heisst ein Vektorverband genau dann, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

(i) $\mathscr{F}$ ist ein Teilvektorraum von $\mathbb{R}^X$.
(ii) Für alle $f\in\mathscr{F}$ ist $|f|\in\mathscr{F}$.

$\mathbb{R}^X$ ist trivialerweise selbst ein Vektorverband. Jeder Vektorverband $\mathscr{F}\subset\mathbb{R}^X$ ist ein Teilverband von $\mathbb{R}^X$, denn für alle $f,g\in\mathscr{F}$ ist

$$f\vee g=\tfrac{1}{2}(f+g+|f-g|)\in\mathscr{F}$$

und

$$f\wedge g=\tfrac{1}{2}(f+g-|f-g|)\in\mathscr{F}\,.$$

Insbesondere findet man also $f_+\in\mathscr{F}$ und $f_-\in\mathscr{F}$ für alle f aus $\mathscr{F}$.

In der höheren Analysis spielt der Begriff des abstrakten Vektorverbandes eine grosse Rolle. Die einfachen Vektorverbände von Funktionen bilden ein gutes Anschauungsmaterial für diesen wichtigen Begriff. Für unsere Zwecke dienen sie als Definitionsbereiche von Integralen. Sie sind aber auch im Lichte von 2. und 3. zu sehen. Wir wollen nun einige Beispiele betrachten.

Beispiel 1. Der Raum $\mathscr{F}(X)$ aller Funktionen $f \in \mathbb{R}^X$ mit der Eigenschaft, dass $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ endlich ist, ist wohl das einfachste Beispiel eines Vektorverbandes. Trotz seiner Einfachheit und Durchsichtigkeit ist er aber sehr wichtig, wie wir noch sehen werden.

Beispiel 2: Wir betrachten den Spezialfall $X = \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Es bezeichne $\mathscr{C}(n)$ die Menge aller stetigen Funktionen auf X. Dann ist $\mathscr{C}(n)$ ein Vektorverband. In der Tat ist jede Linearkombination stetiger Funktionen wieder stetig, und dasselbe gilt für den Betrag einer stetigen Funktion f, wie unmittelbar aus der Beziehung

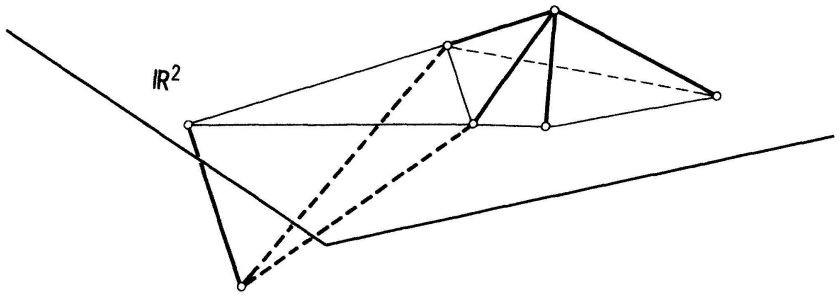
$$\big|\,|f(y)| - |f(x)|\,\big| \leq |f(y) - f(x)|$$

hervorgeht.

Beispiel 3: Wie in Beispiel 2 sei $X = \mathbb{R}^n$. Dann ist die Menge $\mathscr{K}(n)$ aller stetigen Funktionen auf X mit beschränktem Träger ein Vektorverband. Dabei bezeichnen wir als Träger einer Funktion f auf X die abgeschlossene Hülle von $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$. Die Vektorverbandseigenschaft von $\mathscr{K}(n)$ ist eine unmittelbare Konsequenz der entsprechenden Eigenschaft von $\mathscr{C}(n)$.
In der klassischen Integrationstheorie auf lokalkompakten topologischen Räumen spielen Räume stetiger Funktionen mit kompaktem Träger eine entscheidende Rolle. Besonders wichtig ist dabei ihre Vektorverbandseigenschaft. Die Räume $\mathscr{K}(n)$ sind einfache Beispiele, mit denen bereits im elementaren Unterricht auf diese wichtigen Strukturen hingewiesen werden kann. Es wäre möglich, die elementare Theorie der Integration im Propädeutikum als Theorie der Funktionale auf $\mathscr{K}(n)$ zu entwickeln ([7], [8]). Wir wollen aber einen anderen Weg gehen, der mehr auf der geometrischen Anschauung aufbaut. Wir werden die im folgenden Beispiel definierten Räume als Basis verwenden.

Beispiel 4: Es sei wiederum $X = \mathbb{R}^n$. Eine Funktion f auf X heisse stückweise linear genau dann, wenn X als Vereinigung endlich vieler Teilmengen $G_1, \ldots, G_k$ dargestellt werden kann, so dass f linear ist auf jeder Menge G_i. Für uns von Interesse sind die stückweise linearen Funktionen aus $\mathscr{K}(n)$. Wir nennen diese Funktionen affin. Es bezeichne $\mathscr{A}(n)$ die Menge aller affinen Funktionen auf X. Jede affine Funktion ist also stetig und besitzt beschränkten Träger. Wir wollen zeigen, dass die Räume $\mathscr{A}(n)$ Vektorverbände sind.
Seien $f, g \in \mathscr{A}(n)$. Dann gibt es Systeme $G_1, \ldots, G_k$ bzw. $H_1, \ldots, H_m$ von Teilmengen von X, so dass $X = \bigcup_{1 \leq i \leq k} G_i = \bigcup_{1 \leq j \leq m} H_j$ und f linear ist auf allen G_i bzw. g linear auf allen H_j. Für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist dann $\alpha f + \beta g$ linear auf den Mengen $G_i \cap H_j$

und es ist $X = \bigcup_{i,j} (G_i \cap H_j)$. Da wir bereits wissen, dass $\mathscr{K}(n)$ ein Vektorverband ist, können wir schliessen, dass $\alpha f + \beta g \in \mathscr{A}(n)$. Es sei nun $G := \{x \in X \mid f(x) \geq 0\}$. Dann ist $|f|$ linear auf jeder Menge $G \cap G_i$ und ebenso auf jeder Menge $(X \setminus G) \cap G_i$, und man findet $|f| \in \mathscr{A}(n)$.
Die folgende Figur zeigt ein Beispiel für den Graphen einer Funktion aus $\mathscr{A}(2)$. Von der in dieser Figur angedeuteten Beziehung zwischen den Funktionen aus $\mathscr{A}(n)$ und den Polyedern aus $\mathbb{R}^{n+1}$ werden wir bei der Diskussion des Integralbegriffes Gebrauch machen.



Die aufgeführten Beispiele zeigen, dass es sich bei den Vektorverbänden um eine Struktur handelt, deren Einführung im Propädeutikum durchaus gerechtfertigt ist.

2. Positive lineare Funktionale, Elementarintegrale

Die nächste Stufe auf dem Weg zum Integralbegriff ist der Begriff des positiven linearen Funktionals auf einem Vektorverband. Es bezeichne weiterhin X eine Menge. $\mathscr{F}$ sei ein Vektorverband von Funktionen aus $\mathbb{R}^X$. Ein positives lineares Funktional auf $\mathscr{F}$ ist eine Abbildung $l: \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) l ist linear
(ii) $l(f) \geqq 0$ für alle $f \in \mathscr{F}$, $f \geq 0$.

Positive lineare Funktionale sind bereits vollständig bestimmt durch ihre Werte auf den positiven Funktionen. Zur Vereinfachung der genauen Formulierung dieses Sachverhaltes definieren wir für beliebige Teilmengen $\mathscr{G}$ von $\mathbb{R}^X$

$$\mathscr{G}_+ := \{f \in \mathscr{G} \mid f \geq 0\}.$$

Es gilt nun der folgende

Hilfssatz. Sei $\tilde{l}: \mathscr{F}_+ \to \mathbb{R}_+$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

(a) Für alle $f, g \in \mathscr{F}_+$ ist $\tilde{l}(f+g) = \tilde{l}(f) + \tilde{l}(g)$.
(b) Für alle $f \in \mathscr{F}_+$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ist $\tilde{l}(\alpha f) = \alpha\, \tilde{l}(f)$.

Dann gibt es genau ein positives lineares Funtional l auf $\mathscr{F}$ mit der Eigenschaft, dass $l(f) = \tilde{l}(f)$ für alle $f \in \mathscr{F}_+$.

Zum Beweis bemerkt man, dass für ein solches Funktional l notwendigerweise $l(f) = \tilde{l}(f_+) - \tilde{l}(f_-)$ gelten muss für alle $f \in \mathscr{F}$. Es ist aber leicht einzusehen, dass das auf diese Weise definierte Funktional l positiv und linear ist.
Wir wollen wieder Beispiele betrachten.

Beispiel 1. Sei $\mathscr{F}(X)$ der Vektorverband aus Beispiel 1,1. Es sei $g \in \mathbb{R}_+^X$. Definiert man dann

$$l_g\colon \mathscr{F}(X) \to \mathbb{R}\,,\ f \mapsto \sum_{x \in \{f \neq 0\}} f(x)\, g(x)\,,$$

so ist l_g ein positives lineares Funktional auf $\mathscr{F}(X)$. Dabei wurde für alle $f \in \mathscr{F}(X)$ $\{f \neq 0\} := \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ gesetzt.

Beispiel 2. Ein wichtiges Beispiel bilden die Stieltjes-Funktionale auf $\mathscr{K}(I)$. Wir haben nicht die Absicht, an dieser Stelle näher auf dieses wohlbekannte Beispiel einzugehen. Es sei jedoch festgehalten, dass auch diese wichtigen Funktionale durchaus in den hier entwickelten Rahmen passen. Der interessierte Leser sei auf [6] verwiesen.

Beispiel 3. Wir betrachten den Raum $\mathscr{A}(n)$ der affinen Funktionen auf $\mathbb{R}^n$. Sei f eine positive affine Funktion. Wir betrachten den Graphen

$$\{(x, f(x)) \mid x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$$

von f. Diese Hyperfläche schliesst zusammen mit der Hyperebene $x_{n+1} = 0$ ein $n+1$-dimensionales Polyeder ein, welches wir mit $P(f)$ bezeichnen. Die Situation ist in Figur 1 angedeutet. Es bezeichne sodann $l(f)$ das $n+1$-dimensionale Volumen dieses Polyeders. Wir behaupten, dass l die Eigenschaften (a) und (b) des obigen Hilfssatzes besitzt.
Seien $f, g \in \mathscr{A}(n)_+$. Dann gibt es Teilmengen $H_1, \ldots, H_m$ von $\mathbb{R}^n$, so dass sowohl f als auch g auf allen H_k linear sind. Wir können annehmen, dass die Teilmengen H_k n-dimensionale Simplexe sind, welche höchstens $n-1$-dimensionale Bereiche gemeinsam besitzen.
Wir halten nun k fest. $P_k(f)$ bezeichne den prismatischen Teil von $P(f)$ über H_k und analog definieren wir $P_k(g)$ sowie $P_k(f+g)$. Für ein beliebiges i-dimensionales Polyeder Q bezeichne $V_i(Q)$ dessen i-dimensionales Volumen. Bezeichnen wir sodann mit $X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}$ die Ecken von H_k, so erhalten wir

$$V_{n+1}(P_k(f)) = \frac{1}{n+1} \sum_{m=1}^{n+1} f(X_m)\, V_n(H_k)\,.$$

Analoge Beziehungen ergeben sich für $V_{n+1}(P_k(g))$ sowie für $V_{n+1}(P_k(f+g))$. Damit erhält man aber sofort

$$V_{n+1}(P_k(f+g)) = V_{n+1}(P_k(f)) + V_{n+1}(P_k(g))\,.$$

Summieren wir über alle k, so finden wir schliesslich mittels der Additivität des Polyeder-Inhaltes die gewünschte Eigenschaft (a). (b) ergibt sich analog.
Der oben formulierte Hilfssatz impliziert nun die Existenz eines eindeutig bestimmten positiven linearen Funktionals l_n auf $\mathscr{A}(n)$, welches für alle $f \in \mathscr{A}(n)_+$ den Wert des Volumens von $P(f)$ annimmt.
Zu diesem Beispiel sind einige Bemerkungen angebracht. Das Funktional l_n wird Ausgangspunkt sein für unsere Behandlung des n-dimensionalen Integrals. Es stellt sich natürlich die Frage, wie weit der Student im Propädeutikum mit den Eigenschaften des Polyederinhaltes vertraut ist. Dazu ist zu bemerken, dass von der Mittelschule her eine recht gute Vorstellung vorhanden ist für die Dimensionen 2 und 3. Die Verallgemeinerung auf beliebige Dimensionen erfolgt meist im propädeutischen Unterricht in linearer Algebra. Wir möchten jedoch betonen, dass unserer Auffassung nach an dieser Stelle durchaus auf der Analogie zu den Dimensionen 2 und 3 aufgebaut werden darf. Dies umsomehr, als eigentlich nur die Eigenschaften des Inhaltes von Simplexen vorausgesetzt werden müssen, wie wir kurz zeigen wollen.
Wir haben oben Gebrauch gemacht von der Inhaltsformel für einen prismatischen Körper über einen Simplex als Grundbereich. Bezeichnet H ein n-dimensionales Simplex mit den Ecken $X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}$, und wird der prismatische Körper P über H durch den Graphen der linearen Funktion f erzeugt, so ist

$$V_{n+1}(P) = \frac{1}{n+1} \sum_{m=1}^{n+1} f(X_m)\, V_n(H)\,.$$

Es ist nicht schwer, diese Formel anschaulich zu begründen. Aufgrund der dem Studenten bekannten Resultate für $n=1$ und $n=2$ ist es naheliegend, $V_{n+1}(P)$ anzusetzen als Produkt des Inhaltes der Grundfläche H mit einer linearen Funktion der Kantenlängen $f(X_m)$. Da sich die Reihenfolge der Bezeichnung der Ecken des Simplexes nicht auf den Inhalt von P auswirken darf, muss die lineare Funktion der Kantenlängen symmetrisch sein. Der Faktor $1/(n+1)$ schliesslich ergibt sich daraus, dass die Formel für den Spezialfall eines $n+1$-dimensionalen Quaders P dessen wohlbekanntes Volumen ergeben muss. Es sei noch erwähnt, dass die Formel in der einfachen Form

$$V_{n+1}(P) = f(S)\, V_n(H)$$

geschrieben werden kann, wenn wir mit S den Schwerpunkt von H bezeichnen.
Die durch affine Funktionen erzeugten Polyeder sind Vereinigungen von prismatischen Körpern über Simplexen. Wir können den Inhalt eines solchen Polyeders als Summe der Inhalte der prismatischen Teilkörper definieren, wenn wir uns von der Unabhängigkeit dieser Zahl von der Wahl der Zerlegung des Polyeders in Prismen überzeugen. Unter Verwendung obiger Notationen genügt es zu zeigen, dass bei einer Zerlegung von H in Teilsimplexe H_k mit Schwerpunkt S_k die Formel

$$f(S)\, V_n(H) = \sum_k f(S_k)\, V_n(H_k)$$

gilt. Bezeichnen wir für einen Punkt X mit $\vec{x}$ dessen Ortsvektor in Bezug auf ein festgelegtes Koordinatensystem, so folgt aus den Eigenschaften des Schwerpunktes

$$V_n(H)\,\vec{s} = \sum_k V_n(H_k)\,\vec{s}_k\,,$$

und man erhält die gesuchte Formel unter Verwendung der Linearität von f.
Es ist also durchaus möglich, für Polyeder, die durch affine Funktionen erzeugt werden, einen Inhaltsbegriff auf der Basis des Inhaltes von Simplexen zu entwickeln.
Ueber die allgemeinen Grundlagen des Inhaltes von Polyedern vergleiche man [9], [10].
Die in den drei Beispielen behandelten Funktionale haben alle eine wichtige Eigenschaft, nämlich die Nullstetigkeit. Ein positives lineares Funktional l auf einem Vektorverband $\mathscr{F}$ heisst nullstetig genau dann, wenn für jede fallende Folge $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ aus $\mathscr{F}$ mit $\bigwedge_{n\in\mathbf{N}} f_n = 0$ die Beziehung $\inf_{n\in\mathbf{N}} l(f_n) = 0$ besteht. Die Nullstetigkeit ist äquivalent zu jeder der folgenden Eigenschaften:

(c) Für alle wachsenden Folgen $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ aus $\mathscr{F}$ mit

$$\bigvee_{n\in\mathbf{N}} f_n = f \in \mathscr{F} \quad \text{gilt} \quad l(f) = \sup_{n\in\mathbf{N}} l(f_n)\,.$$

(d) Für jede fallende Folge $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ aus $\mathscr{F}$ mit

$$\bigwedge_{n\in\mathbf{N}} f_n = f \in \mathscr{F} \quad \text{gilt} \quad l(f) = \inf_{n\in\mathbf{N}} l(f_n)\,.$$

Der Beweis der Nullstetigkeit für die Funktionale l_n beruht auf dem im Propädeutikum bewiesenen Satz von Dini, wonach für fallende Folgen $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ aus $\mathscr{K}(n)$ mit $\bigwedge_{n\in\mathbf{N}} f_n = 0$ stets die Beziehung

$$\inf_{n\in\mathbf{N}}\left(\sup_{x\in X} f_n(x)\right) = 0$$

besteht. Ist $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine solche Folge aus $\mathscr{A}(n)$, so gilt

$$f_n = \sqrt{f_n}\;\sqrt{f_n} \le \sqrt{f_1}\;\sqrt{f_n}\,.$$

Die Folge $(\sqrt{f_n})_{n\in\mathbf{N}}$ ist selbst von dieser Art und es gibt demnach zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $\sqrt{f_m}(x) < \varepsilon$ für alle $m \ge n$ und alle $x \in X$. Damit ist aber $f_m \le \varepsilon\sqrt{f_1}$ für alle $m \ge n(\varepsilon)$ und es ergibt sich $l_n(f_m) \le \varepsilon\, l_n(\sqrt{f_1})$ für alle solchen m. Hieraus folgt die Nullstetigkeit von l_n.
Selbstverständlich ergibt sich auf diese Weise die Nullstetigkeit für beliebige positive lineare Funktionale auf Vektorverbänden $\mathscr{F} \subset \mathscr{K}(n)$. Im Hintergrund steht die Theorie der positiven linearen Funktionale auf Vektorverbänden von stetigen Funktionen mit kompaktem Träger auf einem lokalkompakten topologischen Raum. Damit ist wieder ein Anschluss an ein wichtiges Thema der höheren Analysis herge-

stellt. Beispiel 1 gehört ebenfalls in diesen Rahmen. Man hat nur X mit der diskreten Topologie zu versehen. Die Funktionale l_g sind also ebenfalls alle nullstetig.
Die positiven linearen Funktionale l_n und l_g treten auf natürliche Weise im propädeutischen Unterricht in Erscheinung. Im allgemeinen wird aber dort leider auf die Gemeinsamkeiten kein Gewicht gelegt. Strukturell gehören sie jedoch in denselben Rahmen. Dementsprechend zeigen sich grosse Analogien hinsichtlich der mit ihnen verbundenen Problemstellungen. Mit einem fundamentalen Problem, nämlich der Erweiterung solcher Funktionale befassen wir uns im zweiten Teil dieser Arbeit.

K. Weber, Mathematik-Departement ETH-Zürich

LITERATURVERZEICHNIS

1 Serret-Scheffers: Lehrbuch der Differential und Integralrechnung, Band 2. Teubner, Leipzig 1915.
2 G. M. Fichtenholz: Differential- und Integralrechnung. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1964.
3 M. Barner, F. Flohr: Analysis. W. de Gruyter, Berlin 1983.
4 H. Heuser: Lehrbuch der Analysis. Teubner, Stuttgart 1982.
5 P. J. Daniell: A general form of integral. Annals of Math. *19*, 1917–1918.
6 C. Constantinescu, K. Weber: Integration Theory, Band 1. Wiley, New York 1985.
7 B. Angerer, H. Bauer: Mehrdimensionale Integration. Sammlung Göschen, 2121. W. de Gruyter, Berlin 1976.
8 E. Hewitt, K. Stromberg: Real and Abstract Analysis. Springer, Berlin 1975.
9 H. Hadwiger: Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Springer, Berlin 1957.
10 Enzyklopädie der Elementarmathematik, Band 5. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1971.

© 1986 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/86/050107-10$1.50 + 0.20/0

Ein Kettenkomplex auf geordneten Tupeln

Einleitung

Ein Kettenkomplex $C(n)$, dessen q-te Kettengruppe von allen angeordneten q-Tupeln $(i_1, i_2, \ldots, i_q)$ mit $i_j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ und $i_j \neq i_k$ für $j \neq k$ frei abelsch erzeugt wird, wird definiert. Dann wird gezeigt, dass der Komplex azyklisch bis zur Dimension n ist.
In Gruppentheorie und Kombinatorik wurde seit einigen Jahren ein Kettenkomplex betrachtet, dessen formale Definition sich von derjenigen des n-Simplex nur darin unterscheidet, dass man statt (ungeordneten) Teilmengen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ nun (geordnete) Tupel nimmt. Die einzige uns bekannte schriftlich niedergelegte Definition (einer mod-2-Version) dieses Kettenkomplexes befindet sich in einem Manuskript von W. Mielants [1], Seite 39ff.; der Kettenkomplex wurde aber auch von H. Hiller und L. Scott betrachtet. Da die Definition des Komplexes dem n-Simplex analog ist, eine elementare Betrachtung der Eulercharakteristik aber sofort zeigt, dass der Komplex nicht azyklisch sein kann, wird man sofort zu der Vermutung geführt, dass der Komplex «sphärisch» ist, d.h. nur die höchste Homologiegruppe nicht verschwindet. Diese Vermutung von L. Smith, H. Hiller und L. Scott wird im folgenden (mit vollständig elementaren Mitteln) gezeigt. Wir danken L. Smith mehr für die Mitteilung