

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 41 (1986)  
**Heft:** 4

**Artikel:** Zur Abschätzung des Brocardschen Winkels  
**Autor:** Mascioni, V.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-39473>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Aus (5.4) folgt schliesslich unter Beachtung von (8.1) für die Abhängigkeit  $p \rightarrow q$  die explizite Darstellung

$$q \equiv f(p) = 2a \sin^2 \omega \frac{(a^2 - p^2)(a \cot \alpha - p)}{(b^2 - p^2 \sin^2 \omega)(a - p \sin \omega)}. \quad (8.3)$$

Bei dem in § 7 gefundenen wackeligen Sechshorn, gekennzeichnet durch  $2\alpha = \omega = 60^\circ$  und  $a : b = 1 : \sqrt{3}$ , wird die Mittelstellung – in Einklang mit (6.2) – für  $p_0 = q_0 = 2r_0 = (\sqrt{3} - 1)a$  eingenommen.

Die  $2n$ -Hörner mit  $n > 3$  erweisen sich hingegen unter der Annahme (8.1) als nicht wackelig, wie der Verlauf der Diagrammkurven  $q = f(p)$  und  $p = f(q)$  lehrt, die einander im Punkt  $p_0 = q_0$  nicht berühren, sondern unter einem nichtverschwindenden Winkel schneiden.

W. Wunderlich, Wien, und C. Schwabe, Zürich

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 W. Blaschke: Wackelige Achtfläche. *Math. Z.* 6, 85–93 (1920).
- 2 R. Connelly: A flexible sphere. *Math. Intelligencer* 3, 130–131 (1978).
- 3 M. Dehn: Über die Starrheit konvexer Polyeder. *Math. Ann.* 77, 466–473 (1916).
- 4 M. Goldberg: Unstable polyhedral structures. *Math. Mag.* 51, 165–170 (1978).
- 5 H. Liebmann: Ausnahmefachwerke und ihre Determinante. *Sber. bayer. Akad. Wiss.* 1920, 197–227.
- 6 E. Steinitz und H. Rademacher: Vorlesungen über die Theorie der Polyeder. Berlin 1934.
- 7 B. Wegner: On the projective invariance of shaky structures in euclidean space. *Acta mech.* 53, 163–171 (1984).
- 8 W. Wunderlich: Starre, kippende, wackelige und bewegliche Achtfläche. *Elem. Math.* 20, 25–32 (1965). – Snapping und shaky antiprisms. *Math. Mag.* 52, 235–236 (1979). – Kipp-Ikosaeder I, II. *Elem. Math.* 36, 153–158 (1981); 37, 84–89 (1982).
- 9 W. Wunderlich: Neue Wackelikosaeder. *Anz. öst. Akad. Wiss.* 117, 28–33 (1980). – Wackelige Doppelpyramiden. *Anz. öst. Akad. Wiss.* 117, 82–87 (1980). – Wackelikosaeder. *Geom. Dedicata* 11, 137–146 (1981). – Wackeldodekaeder. *Elem. Math.* 37, 153–163 (1982).
- 10 W. Wunderlich: Zur projektiven Invarianz von Wackelstrukturen. *Z. angew. Math. Mech.* 60, 703–708 (1980). – Projective invariance of shaky structures. *Acta mech.* 42, 171–181 (1982).

## Zur Abschätzung des Brocardschen Winkels

Im Inneren des Dreiecks  $A_1 A_2 A_3$  mit Winkeln  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , gibt es immer einen Punkt  $\Omega$  derart, dass  $\angle \Omega A_1 A_2 = \angle \Omega A_2 A_3 = \angle \Omega A_3 A_1 =: \omega$ . Der Brocardsche Winkel  $\omega$  ist dadurch eindeutig bestimmt und genügt der Gleichung (vgl. [4], S. 58–60)

$$\cot \omega = \sum \cot \alpha_i. \quad (1)$$

Gegeben positive Zahlen  $x_1, x_2, x_3$ , definieren wir, für  $r \in \mathbb{R}$ ,

$$M_r(x) := \begin{cases} (\sum x_i^r / 3)^{1/r}, & r \neq 0 \\ (\prod x_i)^{1/3}, & r = 0. \end{cases}$$

Die Mittelwertfunktion  $r \rightarrow M_r(x)$  ist bekanntlich isoton ([3], 2.14.2). Um Wiederholungen zu vermeiden, sei die Bemerkung vorausgeschickt, dass alle Ungleichungen in dieser Note strikt mit Ausnahme des gleichseitigen Falles sind.

1963 konnte Yff [1] nur behaupten, dass

$$M_{-\infty}(\alpha) \leq 2\omega \leq M_1(\alpha) = \frac{\pi}{3}$$

( $M_{-\infty}(\alpha)$  ist der kleinste Winkel des Dreiecks). Er vermutete aber, dass

$$2\omega \leq M_0(\alpha) = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{1/3},$$

und dies ist elf Jahre später von Abi-Khuzam in dieser Zeitschrift bewiesen worden [2]. Nach einer nochmaligen Pause von elf Jahren ist es mir gelungen, die Verschärfung

$$2\omega \leq M_{-1}(\alpha) = 3(\sum 1/\alpha_i)^{-1} \quad (2)$$

zu beweisen. Weiter bleibt meine Vermutung

$$M_{-2}(\alpha) \leq 2\omega$$

noch unbewiesen (und damit ist natürlich die Frage nach der besten Abschätzung noch ungelöst).

**Hilfssatz.** (2) ist vom gleichschenkligen Dreieck mit Winkeln  $\alpha, \alpha, \pi - 2\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ ) erfüllt.

Beweis: Sei  $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . Nach (1) gilt

$$\cot \omega = 2 \cot \alpha + \cot(\pi - 2\alpha) = 2/\sin(2\alpha) + \cot(2\alpha),$$

und nach der Substitution  $x := 2\alpha$  ( $0 < x < \pi$ ) wird (2) zu

$$g(x) := \frac{x(\pi - x)}{2(4\pi/3 - x)} - \operatorname{arcot}\left(\frac{2}{\sin x} + \cot x\right) \geq 0,$$

mit

$$g'(x) = \frac{3/2}{4\cos x + 5} - \frac{2\pi^2}{9} \left(\frac{4\pi}{3} - x\right)^{-2}.$$

$g'(x) = 0$  ist also äquivalent zu

$$\left(\frac{4\pi}{3} - x\right)^2 = \frac{4\pi^2}{27}(4\cos x + 5),$$

was (nach einfachen Konvexitätsbetrachtungen) genau drei Lösungen in  $(0, \pi)$  hat (die mittlere Lösung ist  $2\pi/3$ ). Die Behauptung folgt somit aus

$$g(0^+) = g\left(\frac{2\pi}{3}\right) = g(\pi^-) = 0$$

und

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0, \quad g\left(\frac{3\pi}{4}\right) > 0,$$

was man direkt verifizieren kann.

**Lemma 1.** Für  $0 < x \leq \pi$  gilt

$$3\sin x - x \cos x - 2x < 0.$$

**Beweis (A. Thom):** Für alle  $x > 0$  gilt:

$$\begin{aligned} \sin x &< x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, \\ \cos x &> 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}. \end{aligned}$$

Es genügt daher zu zeigen, dass

$$3\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) - x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}\right) < 0, \text{ für } 0 < x \leq \pi,$$

das heisst, dass

$$\frac{x^5}{6!}(x^2 - 12) < 0, \quad \text{für } 0 < x \leq \pi,$$

was wegen  $\pi^2 < 12$  tatsächlich der Fall ist.

**Lemma 2.** Die Funktion  $f(x) := \left(\frac{x}{\sin x}\right)^3 \cos x$  ist strikt monoton fallend in  $[0, \pi)$  ( $f(0) := 1$ ).

**Beweis:** Man hat, für  $0 < x < \pi$ ,

$$f'(x) = \frac{x^2}{2\sin^4 x} [3\sin(2x) - 2x\cos(2x) - 4x] =: \frac{x^2}{2\sin^4 x} \cdot s(x).$$

Zu zeigen ist, dass  $s(x) < 0$  für  $0 < x < \pi$ . Dies folgt aber sofort aus Lemma 1 falls  $x \in (0, \pi/2]$ . Falls  $x \in [\pi/2, \pi)$  ist die Ungleichung trivial.

**Beweis von (2):** Wir wenden die Methode von Lagrange an die Funktion

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) := \omega(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cdot \sum \frac{1}{\alpha_i} := \operatorname{arcot}(\sum \cot \alpha_i) \cdot \sum \frac{1}{\alpha_i}.$$

Die Nebenbedingung  $\sum \alpha_i = \pi$  führt dann zum System

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \alpha_k} = \frac{(\sum 1/\alpha_i) \sin^2 \omega}{\sin^2 \alpha_k} - \frac{\omega}{\alpha_k^2} = \lambda, & k = 1, 2, 3. \\ \sum \alpha_i = \pi \end{cases} \quad (4)$$

Sei  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda)$  eine Lösung von (4) und setze  $A := \left(\sum \frac{1}{\alpha_i}\right) \sin^2 \omega, B := \omega$ . Dann nimmt die Funktion

$$h(x) := \frac{A}{\sin^2 x} - \frac{B}{x^2}$$

an den Stellen  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  denselben Wert an. Lemma 2 impliziert, dass

$$h'(x) = \frac{2A}{x^3} \left( \frac{B}{A} - \left( \frac{x}{\sin x} \right)^3 \cos x \right)$$

höchstens eine Nullstelle in  $(0, \pi)$  besitzt. Dies impliziert aber, dass die Lösung  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  notwendigerweise gleichschenklig ist. Der Hilfssatz endet somit den Beweis (die Betrachtung der «ausgearteten Dreiecke» ist trivial).

V. Mascioni  
Mathematik-Departement, ETH Zürich

## VERDANKUNG

Ich danke Herrn Prof. J. Steinig für viele wertvolle Verbesserungsvorschläge.

## LITERATURVERZEICHNIS

- 1 P. Yff: An analogue of the Brocard points. Am. Math. Monthly 70, 495–501 (1963).
- 2 F. Abi-Khuzam: Proof of Yff's conjecture on the Brocard angle of a triangle. El. Math. 29, 141–142 (1974).
- 3 D. S. Mitrinović: Analytic Inequalities. Springer-Verlag, Berlin 1970.
- 4 E. Donath: Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1976.