

Zeitschrift:	Elemente der Mathematik
Herausgeber:	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band:	41 (1986)
Heft:	4
Artikel:	Eine Familie von geschlossenen gleichflächigen Polyedern, die fast beweglich sind
Autor:	Wunderlich, W.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-39472

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 02.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Im weiteren zeigt die Abhandlung über den Viertelskreis recht eindrücklich, dass sich grosse Ideen an kleinen, unscheinbaren Problemen entwickeln und fast zur selben Zeit bei verschiedenen Mathematikern zu allgemeinen und endgültigen Theorien führen können. Leibniz hat erkannt, dass die Arbeitsweise mit dem charakteristischen Dreieck nicht auf den Viertelskreis beschränkt sein muss, sondern vielmehr auf allgemeine Kurven übertragbar ist³⁾. Pascal und viele andere seiner Zeitgenossen haben konkrete Pionierarbeit geleistet, welche Leibniz und Newton vollendet haben.

II. Im *Mathematikunterricht* beschränkt man sich bei der Ermittlung von Flächeninhalten (bestimmte Integrale) in der Regel auf Potenzfunktionen.

Die heuristische Indivisibilien-Methode von Pascal zeigt einen elementargeometrischen, anschaulich erlebbaren Weg zur Bestimmung einfacher Integrale trigonometrischer Funktionen.

H. Loeffel
Hochschule St. Gallen

LITERATURVERZEICHNIS

1 Pascal: *Œuvres complètes*. Edition J. Chevalier, Bibliothèque de la Pléiade, Paris 1954.

© 1986 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/86/060083-06\$1.50 + 0.20/0

Eine Familie von geschlossenen gleichflächigen Polyedern, die fast beweglich sind

I. Das Vierhorn

§1. Seit Cauchy (1812) weiss man, dass ein konvexes Polyeder mit unveränderlichen Seitenflächen bei gelenkigen Verbindungen längs der Kanten starr erscheint, weil seine Gestalt eindeutig bestimmt ist. Eine kleine Lücke im Beweisgang wurde später von Steinitz [6] ausgefüllt.

Nach Verzicht auf die Forderung der Konvexität kann die Eindeutigkeit der Form verlorengehen. Es lassen sich leicht nichtkonvexe Polyeder vom topologischen Typus der Sphäre angeben, die einen sprunghaften («kippenden») Übergang zwischen zwei existierenden Gestalten erlauben [6, 8]. Rücken zwei solche Nachbarformen zusammen, so entsteht ein infinitesimal bewegliches «Wackelpolyeder» mit am Modell deutlich merkbarer Instabilität. Das erste Beispiel gab Blaschke [1] mit seinen Wackeloktaedern; weitere Beispiele finden sich bei Goldberg [4] und beim ersten Autor dieser Mitteilung [9]. Wackeligkeit bleibt bei konvexen Polyedern noch ausgeschlossen [3], während sie sich bei

3) Darüber äussert sich Leibniz sehr klar und eindeutig in einem Brief an seinen Freund v. Tschirnhaus (1651–1708) vom Dezember 1679.

nichtkovexen sogar als projektiv invariant erweist [5, 7, 10], d. h. bei affinen oder kolli- nearen Transformationen des Polyeders erhalten bleibt.

Eine stetige Formänderung endlichen Ausmasses wurde jedoch, auf praktische Erfahrungen gestützt, bei einem geschlossenen Gelenkpolyeder die längste Zeit für unmöglich gehalten, bis Connelly [2] sein sensationelles Gegenbeispiel bekanntmachte. Sein 18-Flach wurde dann von Steffen durch ein einfacheres 14-Flach noch verbessert [2].

Auf der Suche nach weiteren einschlägigen Beispielen entdeckte der zweite Verfasser der vorliegenden Note 1981 sein verblüffendes «Vierhorn», ein 16-Flach, das sogar zwei vollkommen platte Grenzformen annehmen kann. Als er das Modell auf der faszinierenden «Phänomene»-Ausstellung in Zürich 1984 zur Schau stellte, war er sich gewisser geringer Unstimmigkeiten bereits wohl bewusst. Der Beitrag des ersten Autors besteht nun in der quantitativen Analyse der vorhandenen Abweichungen.

§2. Sei ABS ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Basiswinkel α und der Schenkellänge $AB = AS = a$. Die Basis BS hat dann die Länge

$$b = 2a \cos \alpha < 2a. \quad (2.1)$$

Fügt man vier solche Dreiecke zu einem Vierkant $SABCD$ mit der Spitze S zusammen ($SA = SC = a, SB = SD = b$), so ist dieses doppelt symmetrische, kurz als «Horn» bezeichnete Gebilde zwangsläufig verformbar (Freiheitsgrad 1). Seine Öffnung ist berandet von einem windschiefen Rhombus $ABCD$ mit der Seitenlänge a .

Wird dieses Horn mit seinem Spiegelbild bezüglich der Ebene BAD vereinigt, so erhält man ein «Zweihorn», das noch immer zwangsläufig beweglich ist und ebenfalls einen windschiefen Rhombus $BCD\bar{C}$ mit der Seitenlänge a als Öffnungsrand aufweist (Fig. 1). Dessen jeweilige Gestalt ist im Hinblick auf die bekannte Seitenlänge a durch die orthogonal-windschiefen Diagonalen $BD = 2p$ und $\bar{C}C = 2q$ bestimmt. Die Parameter p und q sind allerdings nicht unabhängig voneinander, sondern durch eine noch zu ermittelnde Relation $F(p, q) = 0$ verknüpft.

§3. Unter Verwendung eines dem Zweihorn gemäss Figur 1 angepassten kartesischen Koordinatensystems $(A; x, y, z)$ können die nachstehenden Eckpunkte angesetzt werden durch

$$A(0, 0, 0), \quad B(p, 0, u), \quad C(0, q, v), \quad D(-p, 0, u), \quad S(0, r, w). \quad (3.1)$$

Die übrigen Ecken sind wegen der bestehenden Symmetrie bezüglich der Ebene $y = 0$ mitbestimmt.

Aufgrund der bekannten Kantenlängen genügen die eingeführten sechs Parameter p, q, r, u, v, w insgesamt fünf Bedingungen, was dem Freiheitsgrad 1 entspricht. Zufolge $AB = AS = a$ gilt zunächst

$$p^2 + u^2 = r^2 + w^2 = a^2. \quad (3.2)$$

Aus $BS = b$ und $BC = CS = a$ folgen ferner mit Bedacht auf (3.2) die Gleichungen

$$2uw = 2a^2 - b^2, \quad q^2 + v^2 = 2uv = 2(qr + vw). \quad (3.3)$$

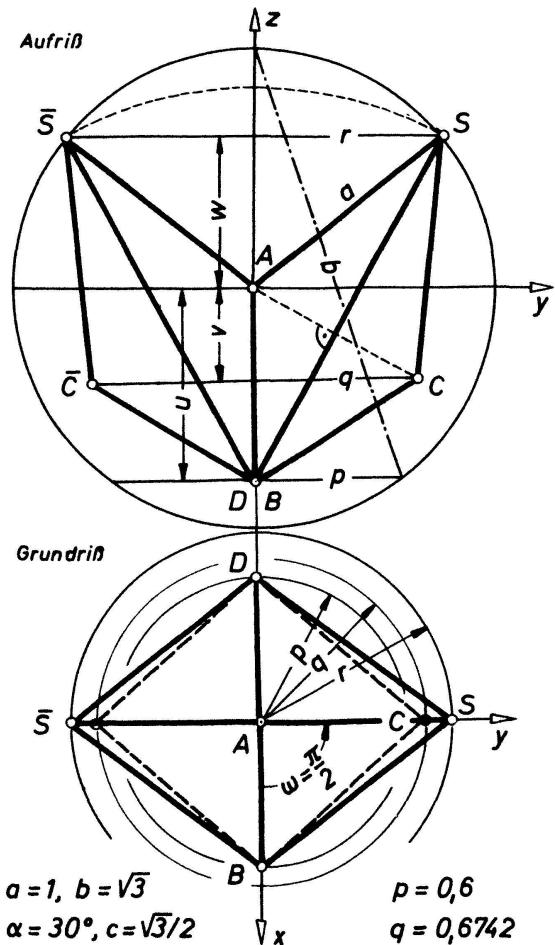


Abb. 1: Zweihorn

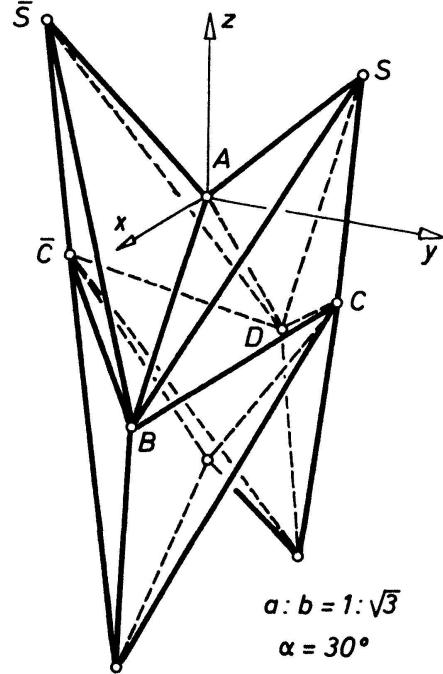


Abb. 2: Vierhorn in Mittelstellung

Hieraus gewinnt man noch die nützliche Beziehung

$$(b^2 - p^2)q = 2ru(u - w). \quad (3.4)$$

Durch Elimination von r, u, v, w aus den Gleichungen (3.2–4) erhält man schliesslich die erwähnte Koppelung zwischen den Grössen p und q in der Form

$$F(p, q) \equiv (a^2 - p^2)(b^2 - p^2)^2 q^2 - a^2(b^2 - 2p^2)^2(c^2 - p^2) = 0 \quad (3.5)$$

mit $b = 2a \cos \alpha$, $c = b \sin \alpha = a \sin 2\alpha$.

Damit ergibt sich die explizite Darstellung

$$q = a \frac{b^2 - 2p^2}{b^2 - p^2} \sqrt{\frac{c^2 - p^2}{a^2 - p^2}}, \quad (3.6)$$

die für jedes gewählte p das zugehörige q liefert. Aus Realitätsrücksichten ist dabei p auf das Intervall $0 \leq p \leq c$ zu beschränken. Die noch fehlenden Formparameter des Zweihorns ergeben sich dann aus (3.2–4) der Reihe nach mit

$$u = -\sqrt{a^2 - p^2}, \quad w = \frac{2a^2 - b^2}{2u}, \quad r^2 = \sqrt{a^2 - w^2}, \quad v = \frac{qr}{u - w}. \quad (3.7)$$

§4. Die Idee zur Bildung eines geschlossenen Polyeders besteht nun darin – ähnlich wie bei Goldbergs «siamesischer Zwillingsdoppelpyramide» [4] –, die viereckige Öffnung des ersten Zweihorns durch ein zweites Exemplar zu schliessen, welches auf den Kopf gestellt und um 90° verdreht ist. Damit ein so entstehendes «Vierhorn» möglich ist, muss offenbar

$$F(p, q) = F(q, p) = 0 \quad (4.1)$$

gelten; dann sind nämlich die beiden Öffnungsränder kongruent und passen aufeinander. Derartige vertauschbare Wertepaare (p, q) gibt es tatsächlich. Da ist einmal das Wertepaar $p_0 = q_0$, dessen Ermittlung auf eine Gleichung 4. Grades in $t = p_0^2$ hinausläuft. In der dadurch bestimmten «Mittelstellung» sind die beiden Zweihorne kongruent. Eine Vorstellung von einem solchen Vierhorn gibt Figur 2. – Ferner existieren mit $p_1 = 0, q_1 = c$ und $p_2 = c, q_2 = 0$ zwei vollständig platte Grenzformen, die ebenfalls realisierbar sind (Fig. 3).

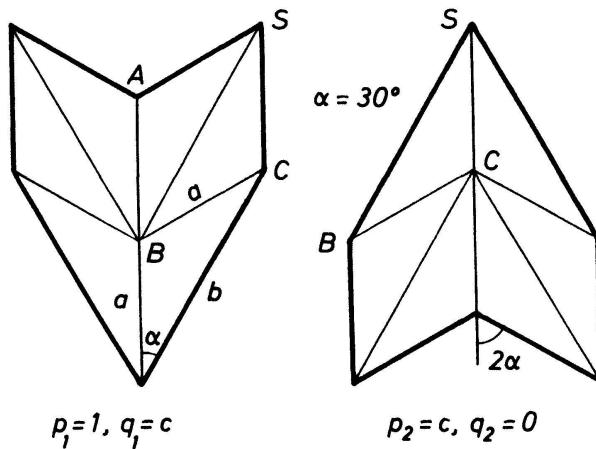


Abb. 3: Platte Grenzformen des Vierhorns

Wie die Situation in der durch p und q beschriebenen Parameterebene aussieht, zeigt Figur 4: Die beiden durch numerische Auswertung der Formel (3.6) zu gewinnenden Diagrammkurven $F(p, q) = 0$ und $F(q, p) = 0$ sind Spiegelbilder bezüglich der Achse $p = q$ und unterscheiden sich bei nicht allzugrossem Winkel α nur wenig voneinander. Wären sie vollkommen identisch – was im Hinblick auf (3.5) gewiss nicht der Fall ist –, so wäre das Vierhorn sogar stetig deformierbar. In Wahrheit kann es aber bloss die drei vorhin erwähnten Formen annehmen, zwischen denen nur ein unstetiger Übergang möglich ist. Wegen der Nachgiebigkeit des Modellmaterials geht dieser Kippvorgang praktisch fast ohne Widerstand vor sich, sofern $\alpha \leq 30^\circ$.

Für den Zeichner seien noch die Scheitelkrümmungen κ_1 und κ_2 der Diagrammkurve (8. Ordnung) $F(p, q) = 0$ in den Punkten $p_1 = 0$ und $p_2 = c$ vermerkt. Mittels einfacher Potenzreihenentwicklungen findet man die Formeln

$$c\kappa_1 = 1 + \frac{2c^2}{b^2} - \frac{c^2}{a^2} = \cos^4 \alpha + 3 \sin^4 \alpha, \quad c\kappa_2 = \cos^4 \alpha, \quad (4.2)$$

aus welchen $\kappa_1 > \kappa_2$ zu entnehmen ist.

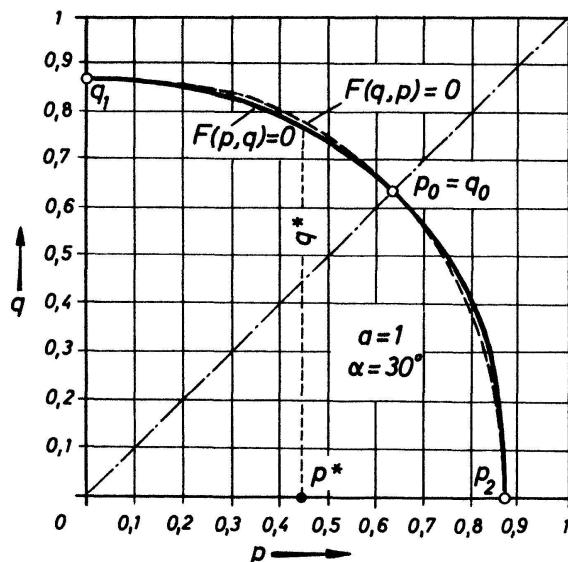


Abb. 4: Deformationsdiagramm eines Vierhorns

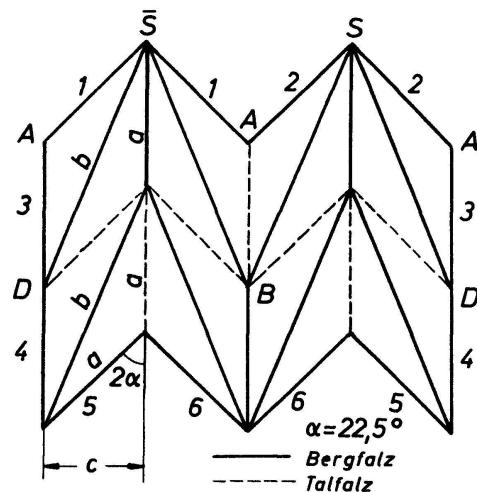


Abb. 5: Netz eines Vierhorns

Eine vorteilhafte Anordnung des Netzes zur Anfertigung eines Kartonmodells zeigt Figur 5; gleichbezifferte Kanten sind dabei zu vereinigen.

Zur quantitativen Beurteilung der vorhandenen Diskrepanzen berechne man mittels Formel (3.6) für eine hinreichende Anzahl von p -Werten aus dem Intervall $0 \leq p \leq p_0$ die zugehörigen Werte $q = f(p)$, ferner aus $p = f(\tilde{q})$ die abweichenden Werte $\tilde{q} > q$. Aus einem Diagramm nach dem Muster Figur 6, das die Abhängigkeit der Differenz $\Delta = \tilde{q} - q$ von p darstellt, lässt sich schliesslich die maximale Abweichung Δ^* samt der Stelle p^* , an der sie auftritt, entnehmen. Der relative Fehler $\delta^* = \Delta^*/q^*$ mag als Mass für die Diskrepanz dienen. Der Gang von δ^* in Abhängigkeit von dem das Vierhorn kennzeichnenden Winkel α ist aus Figur 7 ersichtlich. Einen rohen Anhalt (in Prozenten) liefert in dem interessierenden Bereich die empirische Faustformel $\delta \approx 0,018 \cdot (\alpha/10)^4$, wobei α in Altgraden einzusetzen ist.

Für die in den Figuren 1–4 und 6 verwendete Annahme $\alpha = 30^\circ$ ($a : b = 1 : \sqrt{3}$) beträgt die Diskrepanz $\delta^* \approx 1,38\%$, was die sprunghafte Deformation am Modell noch deutlich spüren lässt. Dem in der Ausstellung präsentierten Blechmodell mit Scharniere lag die Annahme $\alpha = 22,5^\circ$ zugrunde ($a^2 : b^2 = 1 : 2 + \sqrt{2}$, vgl. Fig. 5); die Originalabmessungen

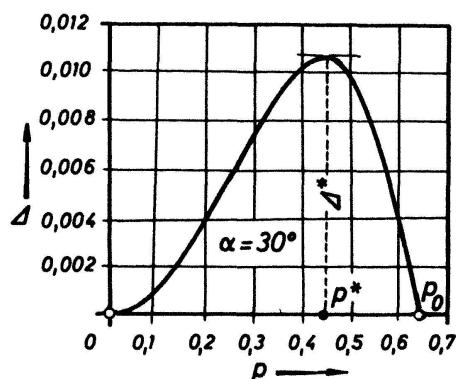


Abb. 6: Fehlerdiagramm

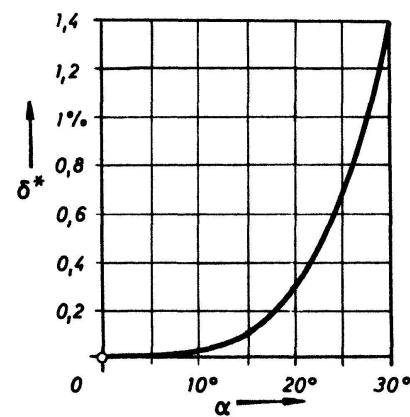


Abb. 7: Diagramm für die Maximalabweichung

betrugen $a = 324,7$ mm und $b = 600$ mm. Die Diskrepanz $\delta^* \approx 0,47\%$ war praktisch nicht merkbar, doch wurde in einer Seitenfläche ein Ventil vorgesehen, um durch Aufblasen des Modells den Start aus den (wackeligen) platten Grenzformen zu erleichtern. Ein kleines, mit $\alpha = 15^\circ$ angefertigtes Kartonmodell ($a^2 : b^2 = 1 : 2 + \sqrt{3}$) ist sehr schlank und funktioniert dank $\delta^* \approx 0,09\%$ verblüffend glatt.

II. Das Sechshorn

§5. Eine naheliegende Verallgemeinerung des Vierhorns stellt sich ein, wenn man das den Ausgang bildende einfache Horn aus §2 nicht bloss verdoppelt, sondern in Form eines drehsymmetrischen Kranzes aus $n > 2$ Exemplaren wiederholt. Auf jedes einzelne Glied entfällt dann ein Winkel vom Betrag $2\omega = 2\pi/n$. Damit die Bildung des Kranzes in reeller und nichtausgearteter Weise überhaupt möglich ist – man beachte die sattelartige Umgebung der Ecke A in Figur 8 –, muss $2n(\pi - 2\alpha) > 2\pi$ gelten, also

$$\alpha < \frac{n-1}{2n} \pi \quad (5.1)$$

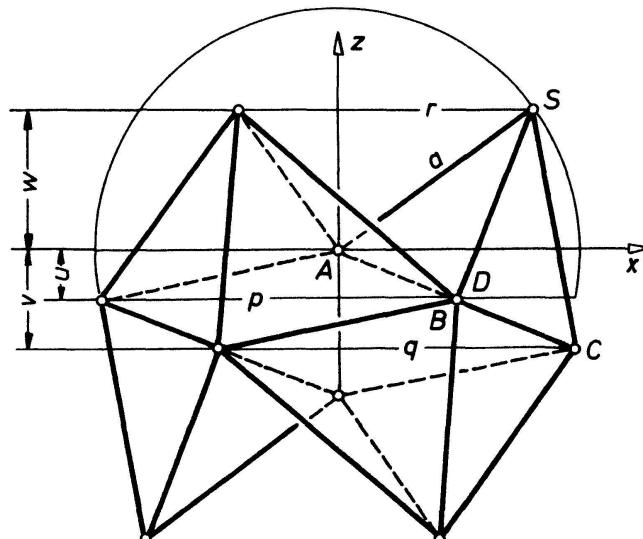


Abb. 8: Sechshorn II. Typs

angenommen werden. Für $n = 3$ verlangt dies $\alpha < 60^\circ$, mithin $b > a$; für $n = 4$ hat man hingegen $\alpha < 67,5^\circ$, also $b/a > 0,765$.

Die Öffnung des solcherart gewonnenen n -Horns ist berandet von einem gleichseitigen, gezackten $2n$ -Eck der Seitenlänge a , dessen Ecken abwechselnd auf zwei koaxiale Kreise verteilt sind. Werden die Radien dieser beiden Kreise mit p und q bezeichnet (vgl. Fig. 8), so können die Ecken des Ausgangselementes $ABCDS$ angesetzt werden mit

$$\begin{aligned} A(0, 0, 0), \quad B(p \sin \omega, p \cos \omega, u), \quad C(0, q, v), \\ D(-p \sin \omega, p \cos \omega, u), \quad S(0, r, w), \quad \text{wobei } \omega = \pi/n. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Aufgrund der bekannten Kantenlängen $AB = AS = a$ gelten wieder die Gleichungen

(3.2), während die auf $BS = b$ und $BC = CS = a$ beruhenden Bedingungen (3.3) jetzt die allgemeinere Form

$$\begin{aligned} 2pr \cos \omega + 2uw &= 2a^2 - b^2, \\ q^2 + v^2 &= 2(pq \cos \omega + uv) = 2(qr + vw) \end{aligned} \quad (5.3)$$

erhalten. An die Stelle von (3.4) tritt die Beziehung

$$(b^2 - p^2 \sin^2 \omega)q = 2(w - u)(pw \cos \omega - ru). \quad (5.4)$$

Die zur Ermittlung der Abhängigkeit $F(p, q) = 0$ nötige Elimination von r, u, v, w aus den fünf Gleichungen (3.2) und (5.3) gestaltete sich nun etwas umständlicher. Zu angenommenem p hat man zunächst $u = -\sqrt{a^2 - p^2}$. Aus der ersten Gleichung (5.3) entnimmt man ferner

$$w = \frac{1}{2u} (2a^2 - b^2 - 2pr \cos \omega), \quad (5.5)$$

was nach Eintragung in $r^2 + w^2 = a^2$ auf die nachstehende quadratische Gleichung für r führt:

$$r^2(a^2 - p^2 \sin^2 \omega) - rp(2a^2 - b^2) \cos \omega + (a^2 p^2 - a^2 b^2 + \frac{1}{4} b^4) = 0. \quad (5.6)$$

Deren Lösung lautet, mit Beachtung von (2.1):

$$r = -a \cdot \frac{ap \cos 2\alpha \cos \omega + uQ}{a^2 - p^2 \sin^2 \omega} \quad (5.7)$$

mit

$$Q^2 = c^2 - p^2 \sin^2 \omega, \quad \text{wobei} \quad c = b \sin \alpha = a \sin 2\alpha. \quad (5.8)$$

Damit lässt sich nun w aus (5.5) berechnen, und weiterhin q aus (5.4). Der geschilderte Algorithmus $p \rightarrow u \rightarrow r \rightarrow w \rightarrow q$ ist zur numerischen Auswertung der Abhängigkeit $p \rightarrow q$ durchaus geeignet. Überdies gelangt man so über die Zwischenergebnisse

$$w = a \cdot \frac{pQ \cos \omega - au \cos 2\alpha}{a^2 - p^2 \sin^2 \omega}, \quad pw \cos \omega - ru = aQ \quad (5.9)$$

mit Benützung von (5.4) zu dem gewünschten Eliminationsresultat:

$$\begin{aligned} F(p, q) \equiv & [(a^2 - p^2 \sin^2 \omega)(b^2 - p^2 \sin^2 \omega)q - 2a^2 p (c^2 - p^2 \sin^2 \omega) \cos \omega]^2 \\ & - a^2 (a^2 - p^2)(b^2 - 2p^2 \sin^2 \omega)^2 (c^2 - p^2 \sin^2 \omega) = 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Für $n = 2$ ($\omega = 90^\circ$) reduziert sich diese Relation auf die für das Vierhorn massgebende Gleichung (3.5).

§6. Das entstandene offene n -Horn mit seinen $e = 3n + 1$ Ecken und $k = 7n$ Kanten besitzt an und für sich den Deformationsfreiheitsgrad $3e - k - 6 = 2n - 3$; dieser reduziert sich jedoch bei Erhaltung der Drehsymmetrie auf 1. Die Gestalt des Randpolygons ist dann mit Rücksicht auf die bekannte Seitenlänge a durch die beiden der Bedingung (5.10) genügenden Kreisradien p und q bestimmt. Die Ergänzung zu einem geschlossenen $2n$ -Horn durch ein zweites Exemplar des n -Horns ist offenbar nur in einer solchen Position möglich, die durch ein vertauschbares Wertepaar (p, q) gekennzeichnet ist, also wieder durch die Bedingung (4.1).

Brauchbar ist sicherlich das zur Mittelstellung gehörige Wertepaar $p_0 = q_0$, dessen Bestimmung im allgemeinen auf eine Gleichung 5. Grades in $t = p_0^2$ hinausläuft. Daneben mag es aber noch weitere vertauschbare Wertepaare (p, q) geben, die im (p, q) -Diagramm als gemeinsame Punkte der Kurve 10. Ordnung $F(p, q) = 0$ und ihres Spiegelbildes $F(p, q) = 0$ aufscheinen. Ein solches Vorkommnis wurde beispielsweise im Falle des Sechshorns ($n = 3, \omega = 60^\circ$) für die Annahme $a = 1, b = 1,7$ festgestellt.

Im übrigen lässt sich für das Sechshorn die Mittelstellung elementar bestimmen. Drückt man nämlich in der entscheidenden, mit $q = p$ angeschriebenen Gleichung (5.4) die Kantenlänge $b = BS$ gemäss dem Ansatz (5.2) aus, so erhält man die Bedingung

$$(p - 2r)(p^2 - 2pr + 4u^2 - 4uw) = 0. \quad (6.1)$$

Demgemäß sind also zwei Fälle zu unterscheiden.

Typ I: $p_0 = q_0 = 2r_0$. Eintragung in die Grundformeln (5.3) und (3.2) führt dann auf $v_0 = 0$ und die Bestimmungsgleichung

$$12r_0^4 - 4(3a^2 + b^2)r_0^2 + (4a^2 - b^2)b^2 = 0, \quad (6.2)$$

nach deren Auflösung sich alle übrigen Formparameter leicht berechnen lassen. Diese Mittelstellung des Sechshorns ist dadurch charakterisiert, dass die Symmetrieachsen aller sechs Teilhörner parallel (zur z -Achse) verlaufen.

Type II: Das Verschwinden des zweiten Klammerfaktors in (6.1) ist mit Rücksicht auf die erste Gleichung (5.3) gleichbedeutend mit

$$p^2 + 4u^2 = 4a^2 + 2b^2. \quad (6.3)$$

Wegen $p^2 + u^2 = a^2$ hat man also

$$p_1^2 = \frac{2}{3}b^2, \quad u_1^2 = \frac{1}{3}(3a^2 - 2b^2). \quad (6.4)$$

Aus der zweiten Gleichung (5.3) ist $v_1 = 2u_1$ zu entnehmen; dies bedeutet, dass das Viereck $ABCD$ ein ebener Rhombus ist (Fig. 8). Die noch fehlenden Parameter sind unschwer zu ermitteln; r_1 etwa ergibt sich aus der quadratischen Gleichung

$$r_1^2 - p_1 r_1 - \frac{b^2(4a^2 - 3b^2)}{6(2a^2 - b^2)} = 0. \quad (6.5)$$

Das in Figur 8 im Aufriss dargestellte Sechshorn II. Typs beruht auf der Annahme $a : b = 5 : 6$. Ein angefertigtes Kartonmodell weist trotz theoretischer Starrheit praktisch eine beachtliche Deformabilität auf, wobei sich die beiden (kongruenten) Hälften im gleichen Sinn verändern. Im Gegensatz dazu schliesst sich bei einem Sechshorn I. Typs die eine Hälfte, während sich die andere öffnet.

§7. Im folgenden soll noch überprüft werden, ob bei einem Sechshorn I. Typs in der Mittelstellung Wackeligkeit im Sinne von §1 auftreten kann. Die beiden Diagrammkurven $F(p, q) = 0$ und $F(q, p) = 0$ müssten einander dann im Punkt $p_0 = q_0 = \sqrt{3} - 1$ berühren – aus Symmetriegründen sogar oskulieren, was eine Wackeligkeit höherer Ordnung bedeuten würde.

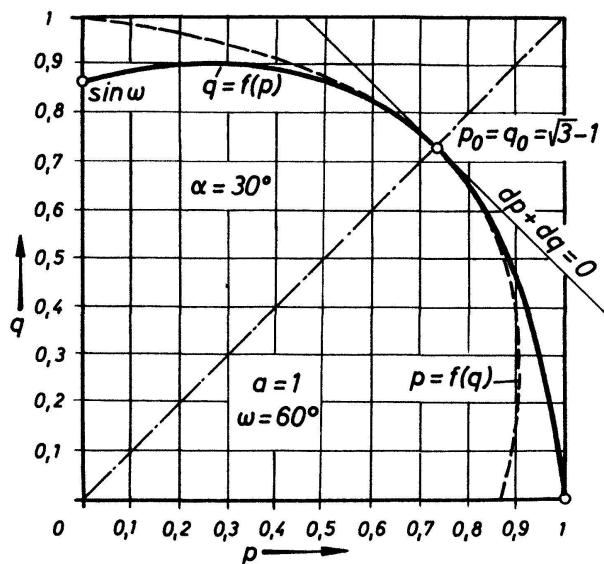


Abb. 9: Deformationsdiagramm des wackeligen Sechshorns I. Typs

Für die Inkremente dp, dq, \dots der Formparameter bei der infinitesimalen Deformation des oberen Dreihorns gelten die durch Ableitung der (mit $\omega = 60^\circ$ angeschriebenen) Grundgleichungen (3.2) und (5.3) zu gewinnenden linearen Beziehungen

$$\begin{aligned} p \cdot dp + u \cdot du &= r \cdot dr + w \cdot dw = 0, \\ r \cdot dp + p \cdot dr + 2w \cdot du + 2u \cdot dw &= 0, \\ q \cdot dq + v \cdot dv &= \frac{1}{2}(q \cdot dp + p \cdot dq) + v \cdot du + u \cdot dv \\ &= r \cdot dq + q \cdot dr + w \cdot dv + v \cdot dw. \end{aligned} \tag{7.1}$$

In der betrachteten Mittelstellung (§6/I) ist nun $p = q = 2r_0$ und $v = 0$. Das Gleichungssystem besitzt daher die Gestalt

$$\begin{aligned} 2r_0 \cdot dp + u_0 \cdot du &= r_0 \cdot dr + w_0 \cdot dw = 0, \\ r_0 \cdot dp + 2r_0 \cdot dr + 2w_0 \cdot du + 2u_0 \cdot dw &= 0, \\ r_0 \cdot dq = r_0 \cdot dp + u_0 \cdot dv &= 2r_0 \cdot dr + w_0 \cdot dv. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Nach Elimination von du und dw bleibt:

$$\begin{aligned} w_0(u_0 - 4w_0) \cdot dp + 2u_0(w_0 - u_0) \cdot dr &= 0, \\ r_0 \cdot dp - r_0 \cdot dq + u_0 \cdot dv &= 0, \\ r_0 \cdot dq - 2r_0 \cdot dr - w_0 \cdot dv &= 0. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Aus diesem linear-homogenen Gleichungssystem findet man (unter Ausschluss von $r_0 u_0 = 0$):

$$dp : dq = (w_0 - u_0)^2 : -3w_0^2. \quad (7.4)$$

Die die Berührung der Diagrammkurven (vgl. Fig. 9) kennzeichnende Bedingung

$$dp + dq = 0 \quad (7.5)$$

verlangt infolgedessen

$$u_0^2 - 2u_0w_0 - 2w_0^2 = 0. \quad (7.6)$$

Diese Forderung ist, wie man anhand der mit $p = q = 2r$ angeschriebenen Grundgleichungen (3.2) und (5.3) feststellt, nur für

$$b^2 = 3a^2 \quad (7.7)$$

erfüllt. Dies bedeutet: Das aus kongruenten gleichschenkligen Dreiecken mit dem Basiswinkel $\alpha = 30^\circ$ aufgebaute Sechshorn ist wackelig (sogar von 2. Ordnung). Figur 9 bestätigt den gewünschten Verlauf der Diagrammkurven.

Für die die infinitesimale Deformation (bei festgehaltenem Achsenkreuz) anzeigen den Inkrementen findet man – im Einklang mit (7.2) – die Verhältnisse

$$dp : dq : dr : du : dv : dw = 1 : -1 : -1,866 : 1,075 : 1,075 : 0,734. \quad (7.8)$$

§8. Die in Figur 9 wiedergegebene Diagrammkurve $F(p, q) = 0$ mit $\alpha = 30^\circ$ ist übrigens nicht von 10. Ordnung, wie aus (5.10) zu schliessen wäre, sondern bloss von 4. Ordnung. Dies ist schon durch den Umstand

$$2\alpha = \omega \quad (8.1)$$

bedingt, weil dann gemäss (5.8) $Q = -u \sin \omega$ wird. Durchläuft man unter der Annahme (8.1) nochmals den in §5 beschriebenen Eliminationsprozess, so erhält man anstelle von (5.7) und (5.9) die rationalen Ausdrücke

$$\frac{r}{a} = \frac{a \sin \omega - p}{a - p \sin \omega}, \quad \frac{w}{u} = \frac{-a \cos \omega}{a - p \sin \omega}. \quad (8.2)$$

Aus (5.4) folgt schliesslich unter Beachtung von (8.1) für die Abhängigkeit $p \rightarrow q$ die explizite Darstellung

$$q \equiv f(p) = 2a \sin^2 \omega \frac{(a^2 - p^2)(a \cot \alpha - p)}{(b^2 - p^2 \sin^2 \omega)(a - p \sin \omega)}. \quad (8.3)$$

Bei dem in § 7 gefundenen wackeligen Sechshorn, gekennzeichnet durch $2\alpha = \omega = 60^\circ$ und $a : b = 1 : \sqrt{3}$, wird die Mittelstellung – in Einklang mit (6.2) – für $p_0 = q_0 = 2r_0 = (\sqrt{3} - 1)a$ eingenommen.

Die $2n$ -Hörner mit $n > 3$ erweisen sich hingegen unter der Annahme (8.1) als nicht wackelig, wie der Verlauf der Diagrammkurven $q = f(p)$ und $p = f(q)$ lehrt, die einander im Punkt $p_0 = q_0$ nicht berühren, sondern unter einem nichtverschwindenden Winkel schneiden.

W. Wunderlich, Wien, und C. Schwabe, Zürich

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 W. Blaschke: Wackelige Achtfläche. *Math. Z.* 6, 85–93 (1920).
- 2 R. Connelly: A flexible sphere. *Math. Intelligencer* 3, 130–131 (1978).
- 3 M. Dehn: Über die Starrheit konvexer Polyeder. *Math. Ann.* 77, 466–473 (1916).
- 4 M. Goldberg: Unstable polyhedral structures. *Math. Mag.* 51, 165–170 (1978).
- 5 H. Liebmann: Ausnahmefachwerke und ihre Determinante. *Sber. bayer. Akad. Wiss.* 1920, 197–227.
- 6 E. Steinitz und H. Rademacher: Vorlesungen über die Theorie der Polyeder. Berlin 1934.
- 7 B. Wegner: On the projective invariance of shaky structures in euclidean space. *Acta mech.* 53, 163–171 (1984).
- 8 W. Wunderlich: Starre, kippende, wackelige und bewegliche Achtfläche. *Elem. Math.* 20, 25–32 (1965). – Snapping und shaky antiprisms. *Math. Mag.* 52, 235–236 (1979). – Kipp-Ikosaeder I, II. *Elem. Math.* 36, 153–158 (1981); 37, 84–89 (1982).
- 9 W. Wunderlich: Neue Wackelikosaeder. *Anz. öst. Akad. Wiss.* 117, 28–33 (1980). – Wackelige Doppelpyramiden. *Anz. öst. Akad. Wiss.* 117, 82–87 (1980). – Wackelikosaeder. *Geom. Dedicata* 11, 137–146 (1981). – Wackeldodekaeder. *Elem. Math.* 37, 153–163 (1982).
- 10 W. Wunderlich: Zur projektiven Invarianz von Wackelstrukturen. *Z. angew. Math. Mech.* 60, 703–708 (1980). – Projective invariance of shaky structures. *Acta mech.* 42, 171–181 (1982).

Zur Abschätzung des Brocardschen Winkels

Im Inneren des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ mit Winkeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, gibt es immer einen Punkt Ω derart, dass $\angle \Omega A_1 A_2 = \angle \Omega A_2 A_3 = \angle \Omega A_3 A_1 =: \omega$. Der Brocardsche Winkel ω ist dadurch eindeutig bestimmt und genügt der Gleichung (vgl. [4], S. 58–60)

$$\cot \omega = \sum \cot \alpha_i. \quad (1)$$