Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 41 (1986)
Heft: 2

Artikel: Zur Entwicklung der zentralen Ideen in der Funktionalanalysis
Autor: Kreyszig, Erwin
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39466

ELEMENTE DER MATHEMATIK
Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare
Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

El. Math. Band 41 Nr. 2 Seiten 25–48 Basel, 10. März 1986

Zur Entwicklung der zentralen Ideen in der Funktionalanalysis

1. Einleitung

Kurz vor der Jahrhundertwende beginnend, entwickelte sich die Funktionalanalysis aus recht heterogenen Anfängen innerhalb von 40–45 Jahren zu einem selbständigen und relativ einheitlichen Gebiet. Rein äusserlich dokumentierte sich der Abschluss dieses Prozesses im Jahre 1932 durch das gleichzeitige Erscheinen dreier Bücher, von Banach [1] über die Grundlagen der Theorie der normierten (insbesondere der Banachräume) und der Frécheträume [1*], von M.H. Stone [23] über Hilberträume (mit Einschluss der Spektraltheorie unbeschränkter linearer Operatoren) und von J. v. Neumann [20] über die Grundlagen der Quantenmechanik im Rahmen der Hilbertraumtheorie.
In zwei aufeinanderfolgenden Arbeiten betrachten wir Zusammenhänge zwischen den Hauptideen bis 1932, die zu dem genannten Entwicklungsprozess der Funktionalanalysis geführt haben, und zwar in der ersten Arbeit die Zeit bis kurz nach der Jahrhundertwende und in der zweiten die Zeit von Fréchets Dissertation (1906) und Hilberts Arbeiten zur Spektraltheorie bis 1932. Manches kann dabei aus Platzgründen nur angedeutet werden. Betreffs weiterer Einzelheiten und Ergänzungen sei auf eine kürzlich gemeinsam mit Herrn Garrett Birkhoff (Harvard-Universität) durchgeführte Untersuchung [4] verwiesen, auf der die vorliegenden Arbeiten zum Teil basieren. Darüber hinaus hat mir Herr Birkhoff wertvolle Ratschläge erteilt, die die Gestalt dieser Arbeiten wesentlich beeinflusst haben, wofür ich ihm auch an dieser Stelle herzlich danken möchte. Inhaltlich schliesse ich mich weitgehend an meine kürzlich auf dem 11. Österreichischen Mathematikerkongress (16.–20. 9. 1985) in Graz gehaltenen Vorträge an.
Das steigende Interesse an der Entwicklung der Funktionalanalysis, wohl bedingt durch die Bedeutung, die diese in Theorie und Anwendung gewonnen hat, wie auch durch ihre Vielschichtigkeit, die den Gesamtüberblick über den erreichten Stand erschwert, ersieht man aus Monographien, wie etwa [5, 8, 18, 19], und aus einer wachsenden Zahl von Publikationen in Zeitschriften, von denen nur [2, 6, 22, 24] genannt seien [2*].

2. Entwicklungsperioden

Als ersten Schritt unterteilen wir die Gesamtentwicklung zeitlich in verschiedene aufeinanderfolgende Perioden. Dadurch schaffen wir eine gewisse Ordnung in der Vielfalt der miteinander verflochtenen Ideen und Erscheinungen. Stichwortartig kennzeichnen wir die Hauptmerkmale und -ereignisse einer jeden dieser Perioden. So erhalten wir als erstes Ergebnis einen groben Gesamtüberblick in der Gestalt der folgenden

Zeittafel.

1684 *Erste Veröffentlichung zur Differentialrechnung* durch Leibniz [15]
1684–1887 Vorgeschichte
Bedeutsam für die spätere Funktionalanalysis ist während dieser Zeit vor allem die Entwicklung des Funktionsbegriffs, des Raumbegriffs, der Fourierreihen, der Variationsrechnung, der Potentialtheorie und der Mengenlehre auf $\mathbf{R}$ und im $\mathbf{R}^n$.

1887 *Geburtsjahr. Erste Noten über Funktionale* von Volterra [25, 26]
1887–1906 Übergangsperiode
Kennzeichen: Behandlung funktionalanalytischer Probleme mit klassischen Methoden.
Relevante Entwicklungen:
Integralgleichungen (1896 Volterra, 1900–3 Fredholm, 1904–6 Hilbert)
Wachsende Bedeutung der Axiomatik (1888 Dedekind, 1889 Peano, 1899 Hilbert)
Funktionale (1903 Hadamard)
Mass- und Integrationstheorie (Peano, Jordan, Borel, 1902 Lebesgue)

1906 *Einführung metrischer Räume* durch Fréchet [9]
1906–32 Entwicklung der Funktionalanalysis zu einem eigenen Gebiet
Hauptereignisse und -entwicklungen:
Integralgleichungen und Operatoren (1906 Hilbert; 1913, 1916 F. Riesz)
Riesz-Fischer-Satz (1907)
Funktionale (1906 Fréchet; 1906, 1909, 1910 F. Riesz)
Topologischer Raum (1914 Hausdorff, 1924 Alexandroff)
Hilbertraum und Quantenmechanik (Hilbert, 1927–32 v. Neumann, M. Stone)
Normbegriff (1916 F. Riesz, 1920 Banach, 1921 Helly, 1922 Hahn, Wiener)
Banach- und Fréchetraum (1920-32 Hahn, Banach, Steinhaus, Mazur)

1932 *Monographien von Banach, M. Stone und v. Neumann:* Äusserliches Zeichen des Abschlusses der Entwicklung.
1932–85 Vielgestaltige Weiterentwicklung mit vielen neuen Anwendungen.
Wird in der vorliegenden Arbeit nicht weiter behandelt. Einige dieser neuen Entwicklungen betreffen die Ergodentheorie, Banach- und v. Neumann-Algebren, topologische Vektorräume, insbesondere lokalkonvexe Räume, Operatorentheorie, insbesondere nichtlineare Operatoren, Distributionen, abstrakte harmonische Analyse und Analysis auf Mannigfaltigkeiten. Anwendungsgebiete umfassen die numerische Analysis, Approximationstheorie, Quantentheorie, partielle Differentialgleichungen usw.

3. Die Idee des Funktionsbegriffs

Um der zu behandelnden Materie näherzutreten, stellen wir den Begriff des *Funktionenraums* in den Mittelpunkt. Dieser Begriff, der sich sehr allgemein auffassen lässt (indem man z. B. Räume von Distributionen einbegreift), spielt nicht nur in der Theorie eine zentrale Rolle, sondern durchdringt auch die Anwendungen auf die Numerik, Approximationstheorie, Differentialgleichungen und andere Gebiete. Zugrunde liegt die Idee, Mengen von Funktionen, die gewisse Eigenschaften gemeinsam haben (z. B. alle reellwertig und in demselben Intervall stetig sind), als «Punkte» eines (metrischen oder noch allgemeineren) «Raumes» aufzufassen. Dies setzt den *Funktionsbegriff* und den *Raumbegriff* voraus.

Die Idee des *Funktionsbegriffs* hat sich langsam, aber folgerichtig und ohne wesentliche Umwege entwickelt, vor allem im Zusammenhang mit der Differential- und Integralrechnung. Die erste Veröffentlichung der Differentialrechnung erscheint im Jahre 1684: Leibniz [15] entschliesst sich erzürnt zu einer raschen und knappen Mitteilung seiner Theorie, um weiteren Plagiaten durch W. v. Tschirnhaus vorzubeugen, der wesentliche Ergebnisse von Leibniz 1683 (in Actis eruditorum, 433–37) unter seinem Namen publiziert hatte. Das Wort «functio» wird 1694 von Leibniz in einem anderen Sinn [3*] und ab 1698 von Joh. Bernoulli und Leibniz etwa in dem heute üblichen Sinne benutzt. Wichtiger als das *Wort* aber ist die *Sache*, nämlich die Idee, die verschiedenartigen Abhängigkeitsverhältnisse, die Leibniz selbst um transzendente bereichert hatte, unter einem einzigen Begriff, dem der Funktion, zusammenzufassen, als Grundlage für den neuen «Calculus», dessen Kenntnis sich von 1684 an relativ rasch verbreitete.

Euler hat dann mit seiner berühmten «Introductio in analysin infinitorum» (1748) ein Werk von grossem Einfluss geschaffen, das erstmals den Begriff der Funktion [4*] an die Spitze stellt und als Einteilungsprinzip benutzt. Dem 19. und beginnenden 20. Jahrhundert verdanken wir schliesslich drei wichtige Funktionsklassen und zugehörige Integrationstheorien (auf die sich die Jahreszahlen beziehen), nämlich

die stetigen Funktionen (Cauchy 1821 [7]),
die beschränkten Funktionen (Riemann 1854 [21, S. 227–71]) und
die messbaren Funktionen (Lebesgue 1902 [14]).

Während dieses Zeitraums erscheint 1822 Fouriers «Bibel des theoretischen Physikers», wie Sommerfeld das Buch «Théorie analytique de la chaleur» genannt hat. Fourierreihen

$$f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

mit

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

– und ebenso Fourierintegrale; vgl. Birkhoff [3, S. 164–70] – werden damit zum Allgemeingut weiter mathematischer Kreise und üben wiederholt grossen Einfluss auf die Entwicklung aus:

1. Der «moderne» Dirichletsche Funktionsbegriff steht in einem Bericht über Fourierreihen [16] aus dem Jahre 1837.

2. Riemanns Integrationstheorie ist ein Nebenprodukt der Untersuchung über Fourierreihen (Habilitationsschrift 1854; [21, S. 227–71]), und Lebesgue hat die Kraft seiner neuen Begriffe und Methoden zuerst in grösserem Umfange an der Theorie der Fourierreihen erwiesen.

3. Fourierreihen wurden zum Prototyp und Leitfaden für viele Ideen zur Orthogonalität in der klassischen Theorie und noch mehr im Hilbertraum, beginnend mit Hilberts Arbeiten über Integralgleichungen.

4. Die Idee des Raumbegriffs in der Funktionalanalysis

Das zweite Ingrediens des Funktionenraums, der *Raumbegriff,* ist in seiner Genesis schwieriger zu erfassen. Denn erstens ist der Begriff als solcher stark von dem mathematischen Gebiet abhängig, das man betrachten will, und zweitens ist es nicht ganz einfach, die Grösse des Einflusses verschiedenartiger Faktoren abzuschätzen, die die *Idee* des Raumes während der Vorgeschichtsperiode 1684–1887 (und darüber hinaus bis 1906) entwickeln und schliesslich auch den für die Analysis entscheidenden Schritt von endlicher zu unendlicher Dimension vorzubereiten halfen. Sicher ist aber, dass sich derartige Faktoren hauptsächlich auf den folgenden Gebieten ergaben:

1. Mechanik. «Raum» nannte man bis weit in das 19. Jahrhundert hinein nur den dreidimensionalen euklidischen Raum. Die *Idee,* über die Dimension 3 hinauszugehen, reicht aber wenigstens bis ins 16. Jahrhundert zurück; z. B. findet man sie bei M. Stifel (1553). Segre (Enc. math. Wiss. III, 2.2., S. 733) macht einige Andeutungen über Frühentwicklungen, die aber ohne Folgen geblieben sind. Die Vorstellung eines $xyzt$-Raumes (t die Zeit) findet sich bei J. L. Lagrange («Méchanique analitique», 1788; 2. Aufl. «Mécanique analytique», 1811–15) und bezeichnet wohl den Beginn der *systematischen* Benutzung höherdimensionaler Räume. Von hier aus führte der Weg folgerichtig zum $3n$-dimensionalen Konfigurations- und $6n$-dimensionalen Phasenraum des n-Körperproblems und zur «Geometrisierung» der Mechanik unter dem Einfluss der klassischen Variationsprinzipe (Hamilton 1834–35, Jacobi 1837).

2. Projektive Geometrie. Die Schöpfungen der grossen Geometer des 19. Jahrhunderts bilden einen weiteren einflussreichen Faktor bei der Entwicklung des Raumbegriffs. Die projektive, die sphärische und die Liniengeometrie wären hier zu nennen und als Namen Poncelet, Chasles, Steiner, Plücker und andere. F. Klein, der mit seinem *Erlanger Programm* selbst einen grundlegenden Beitrag leistete, hat in seinem Buch [12] einen guten Überblick über die Entwicklung dieser Geometrien gegeben.

3. Nichteuklidische Geometrie. Es ist merkwürdig, dass ein Jahrtausende altes Problem fast gleichzeitig dreimal unabhängig voneinander gelöst wird, durch Gauss, der spätestens 1816 Klarheit über die Lösung des Problems besass, aber, das Geschrei der Böotier fürchtend, nichts darüber veröffentlichte, durch N. I. Lobatschewski (1829) und schliesslich durch den jüngeren Bolyai (János, 1832). Diese Arbeiten wurden ziemlich spät bekannt und haben deshalb erst in der 2. Hälfte des 19. Jahrhunderts zur Idee des Raumbegriffs beigetragen.

4. Vektorräume traten zuerst um die Mitte des 19. Jahrhunderts auf (Cayley 1844, Grassmann 1844 «Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre»). Allerdings blieb Grassmanns Werk auch in der Umarbeitung von 1862 so schwierig, dass sein Einfluss gering war. *Unendlichdimensionale* Vektorräume finden wir dann erstmals im Jahre 1888, und zwar bei Peano, und bald darauf (1895) auch bei Pincherle.

5. *Funktionentheorie.* Diese hat durch die Ideen der *komplexen Ebene* (Wessel 1798, Argand 1806, Gauss 1799 (unveröffentlicht) und 1831) und der *Riemannschen Fläche* [5*] ebenfalls die Entwicklung des Raumbegriffs wesentlich beeinflusst. Riemann (1826–66) «doit être considéré comme le créateur de la topologie, comme de tant d'autres branches de la mathématique moderne» schreibt Bourbaki [5, S. 175]. Wichtig ist dabei für uns, dass Riemanns topologischen Ideen (z. B. im Zusammenhang mit Bettizahlen) immer durch Sachverhalte der Analysis motiviert und auf diese angewendet wurden. Bei Riemann finden wir nun erstmals die Idee des *Funktionenraums,* nicht in ausgereifter Form, aber doch greifbar. In seiner Dissertation von 1851 schreibt Riemann [21, S. 30]:
«Die Gesammtheit der Functionen λ bildet ein zusammenhängendes in sich abgeschlossenes Gebiet, indem jede dieser Functionen stetig in jede andere übergehen ... kann.»
In seinem Habilitationsvortrag von 1854, in dem er den Begriff der *Mannigfaltigkeit* einführt, sagt er [21, S. 272, 276],
«dass eine mehrfach ausgedehnte Grösse verschiedener Massverhältnisse fähig ist und der [dreidimensionale euklidische] Raum also nur einen besonderen Fall einer dreifach ausgedehnten Grösse bildet ... Es giebt indess auch Mannigfaltigkeiten, in welchen die Ortsbestimmung nicht eine endliche Zahl, sondern entweder eine unendliche Reihe oder eine stetige Mannigfaltigkeit von Grössenbestimmungen erfordert. Solche Mannigfaltigkeiten bilden z. B. die möglichen Bestimmungen einer Function für ein gegebenes Gebiet, ...».

6. *Mengenlehre.* Wiewohl Cantors erste einschlägige Arbeit schon 1874 erschien, hat die Mengenlehre die Entwicklung des Raumbegriffs erst gefördert, seitdem man begann, auch Räume mit abstrakten Grundmengen zu betrachten, also etwa zu Beginn der Arbeiten Fréchets kurz nach der Jahrhundertwende.

7. *Variationsrechnung.* Neben den Integralgleichungen hat die Variationsrechnung wohl den stärksten Einfluss auf die Frühentwicklung der Funktionalanalysis ausgeübt und diese durch Methoden und Probleme entscheidend bereichert. Im Zusammenhang mit der Raumidee interessiert uns hier vor allem das Problem, ein Integral (Funktional)

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y')\, dx$$

in einer Funktionsmenge zu minimisieren, etwa in der Menge aller auf $[a, b]$ zweimal stetig differenzierbaren Funktionen, die in a und b vorgegebene Werte annehmen, und die Tatsache, dass man diese «zulässigen Funktionen» in der Form

$$y_\varepsilon(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x)$$

darstellt. Für η fordert man das Verschwinden an den Endpunkten des Intervalles und hat dann, wenn y das J minimisiert, $\partial J / \partial\varepsilon|_{\varepsilon=0} = 0$. Hier klingt also die Idee eines Abstandes zwischen Funktionen an, der durch ε gemessen wird. Entsprechend wird die Idee von Umgebungen einer Funktion y_0 in Funktionenräumen durch Bedingungen

$$\text{(a)}\ |y(x) - y_0(x)| < k, \qquad \text{(b)}\ |y'(x) - y_0'(x)| < k$$

vorbereitet, die «schwache Minima» [(a) *und* (b)] und «starke Minima» [nur (a); Weierstrass 1879] definieren (A. Knesers Terminologie, 1900).
Aber von hier bis zu Fréchets metrischem Raum ist es noch ein weiter Weg!

5. Die Geburt der Funktionalanalysis im Jahre 1887

Es ist wohl kein Zufall, dass die Funktionalanalysis in Italien begann, wo Giulio Ascoli (1843–1896), Ulisse Dini (1845–1918) und Cesare Arzelà (1847–1912) schon angefangen hatten, das Neuland vorzubereiten (1883–84 Satz von Ascoli und Arzelà). Das Jahr 1887 des Erscheinens von 5 Noten [25, 26] Volterras über eine recht allgemeine Klasse von Funktionalen wird üblicherweise als das Geburtsjahr der Funktionalanalysis angesehen. Vito Volterra (1860–1940), Dinis Schüler, war im Grunde seines Herzens *angewandter* Mathematiker, wie sein Lebenswerk zeigt, das 5 stattliche Bände von Arbeiten und einige Bücher umfasst. In der ersten der genannten 5 Noten formuliert er (in Italienisch) sein Ziel mit den Worten (Opere *1*, 294):
«In dieser Note erlaube ich mir, auf einige Betrachtungen hinzuweisen, die dazu dienen, Begriffe zu klären, die ... für eine Verallgemeinerung der Riemannschen Funktionentheorie nötig sind ...

§ 1. Funktionen, die von anderen Funktionen abhängen
... Die Verallgemeinerung des [Dirichletschen] Funktionsbegriffs, über die wir hier reden werden, unterscheidet sich wesentlich von dem üblichen [Begriff] der Funktion einer anderen Funktion.»
Die Funktionale y, die Volterra einführt, sind auf einer Menge stetig differenzierbarer Funktionen φ definiert; er sagt: «Hängt ... y von allen Werten einer Funktion $\varphi(x)$ ... in $(A \dots B)$ ab, so ... schreiben wir

$$y\,|[\varphi(x)]|_{A}^{B} \quad \text{oder einfach} \quad y\,|[\varphi(x)]|\,.»$$

Interessant ist, dass er nun Ideen der Variationsrechnung für seinen Zweck benutzt und eine «Variation»

$$\delta y = y\,|[\varphi + \theta]| - y\,|[\varphi]|$$

sowie eine «Ableitung»

$$y'|[\varphi(x), t]| = \lim_{\substack{n-m \to 0 \\ \max|\theta| \to 0}} \frac{\delta y}{\sigma} \quad \text{mit} \quad \sigma = \int_m^n \theta(x)\,dx$$

definiert; θ hat hierbei konstantes Vorzeichen, und das Teilintervall $[m, n]$ zieht sich auf den Punkt t zusammen. Diese ad hoc-Theorie wurde später zum Gegenstand der Kritik wie auch weiterer Untersuchungen [6*].

Salvatore Pincherle (1853–1936), der u.a. durch seinen Encyklopädieartikel (1905) viel zur Verbreitung der neuen Ideen beitrug, schlug 1897 (Math. Ann. *49*, 325–82) für das sich entwickelnde neue Gebiet den Namen «Funktionalkalkül» (Calcul fonctionnel, Calcolo funzionale) vor [7*] und Paul Lévy (1886–1971) im Jahre 1922 schliesslich die heute übliche Bezeichnung «Funktionalanalysis» (Analyse fonctionnelle) [17].

6. Die Übergangsperiode 1887–1906

Diese Periode haben wir in §2 schon stichwortartig gekennzeichnet. Die für uns wichtigsten Ereignisse sind:

1. Mass und Integral entwickeln sich schon bald nach Cantors erster Arbeit zur Mengenlehre (1874) unter Erkenntnis der Mängel des Riemann-Integrals zu der auch in der späteren Funktionalanalysis notwendigen Allgemeinheit. Nacheinander erscheinen die Inhaltsbegriffe von Cantor (1884), Stolz-Harnack (1884–85) und Peano-Jordan (1887 bzw. 1892). Es folgen 1898 das Borel-Mass und als Höhepunkt 1902 das Lebesgue-Integral von Henri Lebesgue (1875–1941), als die infolge ihrer abzählbaren Additivität für die Analysis völlig befriedigende Lösung des Inhaltsproblems. Interessante historische Einzelheiten bringt Hawkins [11].

2. Axiomatische Definitionen, wie sie für die Funktionalanalysis unerlässlich sind, waren um die Jahrhundertwende trotz der vorangegangenen Bemühungen Cantors, Dedekinds und Peanos keineswegs gang und gäbe. Zu ihrer allgemeinen Anerkennung in weiteren mathematischen Kreisen hat ausgerechnet die Elementargeometrie, eines der einfachsten Gebiete der Mathematik, wesentlich beigetragen, insbesondere durch das Buch «Grundlagen der Geometrie» von David Hilbert (1862–1943), das 1899 zuerst erschien (12. Aufl., Stuttgart 1977).

3. Funktionale. Im Jahre 1903 (C.R. Paris *136*, 351–54) warf Jacques Hadamard (1865–1963) das Problem auf, eine allgemeine Darstellung der stetigen linearen Funktionale U auf dem Raum $C[a,b]$ der auf einem Intervall $[a,b]$ stetigen (reellwertigen) Funktionen f, mit der gleichmässigen Konvergenz auf $[a,b]$ als Konvergenzbegriff, zu finden. Er löste dieses Problem durch eine Darstellung der Form

$$U[f(x)] = \lim_{\mu\to\infty} \int_a^b f(x)\,\Phi(x,\mu)\,dx.$$

Für $\Phi(x_0,\mu)$ kann man $U(\mu F[\mu(x-x_0)])$ mit $F(y) = \exp(-y^2)/\sqrt{\pi}$ wählen. Wiewohl diese Darstellung, bei der man für Φ auch andere Funktionen verwenden kann, bald (1909 durch F. Riesz, s. §4 unserer zweiten Arbeit) durch eine bessere ersetzt wurde, bedeutet sie doch insofern einen grossen Fortschritt, als sie zum Modellfall entsprechender Darstellungen für Funktionale auf anderen Räumen wurde, also eine systematische Dualitätstheorie eröffnete [8*]. Hadamards Schüler Maurice Fréchet (1878–1973) gab schon 1905 (Trans. Amer. Math. Soc. *6*, 134–40) entsprechende Darstellungen für stetige lineare Funktionale auf dem Raum $C^r[a,b]$ an, dessen «Punkte» die auf $[a,b]$ r-mal stetig differenzierbaren Funktionen sind.

4. Integralgleichungen. Die Entwicklung klassischer (und, 1906 beginnend, auch «funktionalanalytischer») Theorien für grosse Klassen von Integralgleichungen ist wohl das wichtigste Ereignis der Übergangsperiode. Wir betrachten es deshalb gesondert.

7. Der Einfluss der Potentialtheorie und der Integralgleichungen

Integralgleichungen haben seit der Jahrhundertwende das besondere Interesse weiter mathematischer Kreise erregt. Eingeleitet und motiviert wurde diese Entwicklung schon viel früher durch das *Dirichletproblem* für die Laplacegleichung

$$\Delta u = 0 \text{ in } G, \qquad u = f \text{ auf dem Rand von } G,$$

bei dem man um Existenzbeweise für allgemeine Gebiete G im $\mathbf{R}^2$ (oder im $\mathbf{R}^3$, mit hinreichend glattem Rand) und stetigen Randwerten $u = f$ bemüht war. Als Existenzbeweismethode für dieses Problem hat nun Dirichlet wiederholt sein *Dirichletprinzip* vorgetragen; der Name stammt von Riemann, der das Prinzip ebenfalls benutzt hat. Das Prinzip besagt, dass in der Menge M der in G stetigen und in G zweimal stetig differenzierbaren Funktionen φ mit den Randwerten f eine Funktion $\varphi = u$ existiert, die das Dirichletintegral

$$D(\varphi) = \iint_G \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy$$

zum Minimum macht und das obige Problem löst. Dieses Prinzip wurde aber bald als unhaltbar erkannt: Weierstrass wies 1870 [Werke II, 49–54] darauf hin, dass aus der Existenz einer grössten unteren Schranke k für $D(\varphi)$ eben nicht die Existenz einer Funktion in der Menge M folgt, für die das Integral den Wert k auch wirklich annimmt. Und Prym zeigte 1871 [J.r.a. Math. *73*, 340–64], dass $D(\varphi)$ gar nicht endlich zu sein braucht, selbst wenn das obige Dirichletproblem eine Lösung hat. [9*].
So war man damals auf der Suche nach neuen Existenzbeweismethoden für das Dirichletproblem. Erfolg hatten 1870 H. A. Schwarz mit seinem «alternierenden Verfahren» und Carl Neumann (1832–1925) mit seiner sog. «Methode des arithmetischen Mittels» (für *konvexe* Gebiete), die Integralgleichungen ins Spiel bringt. Neumann setzt nämlich die Lösung u in Integralform als Doppelschichtpotential mit unbekannter Dichte ρ an und diesen Ansatz in $\Delta u = 0$ ein. Wegen der Randbedingung erhält er dann für ρ die Integralgleichung

$$\rho + T\rho = f \quad \text{mit} \quad T\rho(Q) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial G} \rho(Q^*) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\omega,$$

die er durch die berühmte «Neumann-Reihe» löst. Hierbei is ∂G der Rand von G, der zweite Faktor im Integranden die Normalableitung von $1/r$ und r der Abstand QQ^*. [10*].
1888 schlägt du Bois-Reymond den Namen *«Integralgleichungen»* für solche Gleichungen vor und prophezeit, dass die Schaffung zugehöriger allgemeinen Theorien (im Gegen-

satz zur Untersuchung einzelner Gleichungen wie etwa der Abelschen) zur Lösung verschiedenartiger Randwertprobleme führen wird. Nicht allzu lange dauert es, bis 1895 bzw. 1896 Le Roux und Volterra (Opere *2,* 216–54) unabhängig voneinander eine erste solche Theorie publizieren, und zwar eine Lösungstheorie für *«Volterra-Gleichungen»*

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x,y)\varphi(y)\,dy = f(x).$$

Besonders Volterra hebt dabei die Grundidee der «Algebraisierung» des vorgelegten Problems (Approximation der Gleichung durch ein System linearer algebraischer Gleichungen) deutlich hervor [11*].

Anfangs-, Rand- und Eigenwertprobleme der mathematischen Physik waren um diese Zeit eines der Hauptarbeitsgebiete in Paris, dem damals bedeutendsten mathematischen Zentrum der Welt, unter der Führung von Henri Poincaré (1854–1912). Dieser veröffentlichte 1890 (Amer. J. Math. *12,* 211–94) seine schon 1887 angekündigte «Balayagemethode» für die Existenz der Lösung des Dirichletproblems der Laplacegleichung und 1894 (Rend. Palermo *8,* 57–155) seinen Existenzbeweis für alle Eigenwerte der Helmholtzgleichung. Im Jahre 1899, dem Jahre, in dem Poincarés klassisches Lehrbuch «Théorie du potentiel newtonien» erscheint, kommt Ivar Fredholm (1866–1927) zu einem Studienbesuch nach Paris. Er hört dabei auch Poincarés und Picards Vorlesungen. Sofort nach seiner Rückkehr nach Schweden veröffentlicht er die Grundidee (1900; Œuvres 61–68) und 1903 die Einzelheiten (Acta Math. *27,* 365–90) seiner durch das Dirichletproblem motivierten berühmten Lösungstheorie für *«Fredholmgleichungen»*

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x,y)\varphi(y)\,dy = f(x).$$

Er stellt die Lösung in der Form

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,y,\lambda) f(y)\,dy$$

mit dem «lösenden Kern» (oder der «Resolvente») $R = D_1/D$ dar, wobei er, um an die Grundidee, die Analogie zur Algebra (Cramersche Regel) zu erinnern, D und D_1 (beides unendliche Reihen) «Determinante» bzw. «1. Minor» nennt und diese Analogie in der Gestalt der sog. Fredholmschen Sätze voll entwickelt.

Fredholms Theorie wirkte durch ihre Allgemeinheit und Einfachheit sensationell und fand sofort vom Erscheinungsjahr 1900 an ausserordentlich grosses Interesse, wie man aus Arbeiten und späteren Büchern über Integralgleichungen (Bôcher 1909, A. Kneser 1911, Heywood und Fréchet 1912, Lalesco 1912) schliessen kann. Insbesondere fängt Hilbert schon im Jahre 1901 an, sich mit Fredholms Ergebnissen auseinanderzusetzen und seine Spektraltheorie der Integralgleichungen mit symmetrischem Kern zu schaffen. Ein Jahr später erscheint bereits die erste Dissertation eines Hilbert-Schülers (O. D. Kellogg) über Integralgleichungen. Hilbert selbst beginnt von 1904 an mit der Veröffentlichung seiner Theorie (in Buchform zusammengefasst 1912). Mit diesen Untersuchungen befassen wir uns in der Anschluss-Arbeit «Über die weitere Entwicklung der Funktionalanalysis bis 1932», die in El. Math. Vol. 41, Heft 3 erscheinen wird.

Erwin Kreyszig, Carleton University, Ottawa, Kanada

LITERATURVERZEICHNIS

1 S. Banach: Théorie des opérations linéaires (Warschau 1932; Nachdruck Chelsea, New York).
2 M. Bernkopf: The development of function spaces with particular reference to their origins in integral equation theory, Archive Hist. Exact Sciences *4*, 1–96 (1966–67).
3 G. Birkhoff: A Source Book in Classical Analysis (Harvard University Press, Cambridge, MA, 1973).
4 G. Birkhoff und E. Kreyszig: The establishment of functional analysis, Historia Math. *11*, 258–321 (1984).
5 N. Bourbaki: Éléments d'histoire des mathématiques. Nouvelle édition. (Hermann, Paris 1974).
6 F. E. Browder: The relation of functional analysis to concrete analysis in 20th-century mathematics, Historia Math. *2*, 577–90 (1975).
7 A.-L. Cauchy: Cours d'analyse (Debure, Paris 1821; Œuvres (2) III, Gauthier-Villars, Paris 1897).
8 J. Dieudonné: History of Functional Analysis (North-Holland, Amsterdam 1981).
9 M. Fréchet: Sur quelques points du Calcul fonctionnel, Rend. Circ. Mat. Palermo *22*, 1–74 (1906).
10 L. Gårding: The Dirichlet problem, Math. Intelligencer *2*, 43–53 (1979).
11 T. Hawkins: Lebesgue's Theory of Integration, 2nd ed. (Chelsea, New York 1975).
12 F. Klein: Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert (Springer, Berlin 1926–7; Nachdruck Chelsea, New York 1967).
13 E. Kreyszig: Introductory Functional Analysis With Applications (Wiley, New York 1978).
14 H. Lebesgue: Intégrale, longueur, aire, Ann. Mat. Pura Appl. (3) *7*, 231–359 (1902), Œuvres *1*, 201-331 (L'Enseignement Mathématique, Institut de mathématiques, Université de Genève 1972).
15 G. W. Leibniz: Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus, Acta erudit. 467–473 (1684).
16 G. P. Lejeune Dirichlet: Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen, in: H. W. Dove und L. Moser (Herausg.): Repertorium der Physik, Bd. I, 152–74 (1837); Werke *1*, 133–60 (Reimer, Berlin 1889 u. 1897; Nachdruck Chelsea, New York 1969).
17 P. Lévy: Leçons d'Analyse fonctionnelle professées au Collège de France (Gauthier-Villars, Paris 1922).
18 A. F. Monna: Functional Analysis in Historical Perspective (Oosthoek, Utrecht 1973).
19 A. F. Monna: Dirichlet's Principle (Oosthoek, Scheltema & Holkema, Utrecht 1975).
20 J. v. Neumann: Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik (Springer, Berlin 1932).
21 B. Riemann: Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass, 2. Aufl. (Teubner, Leipzig 1892 u. 1902; Nachdruck Dover, New York 1953).
22 R. Siegmund-Schultze: Die Anfänge der Funktionalanalysis und ihr Platz im Umwälzungsprozess der Mathematik um 1900, Archive Hist. Exact Sciences *26*, 13–71 (1982).
23 M. H. Stone: Linear Transformations in Hilbert Space and Their Applications to Analysis (American Mathematical Society, Providence, RI, 1932).
24 A. E. Taylor: A study of Maurice Fréchet, I, Archive Hist. Exact Sciences *27*, 233–95 (1982).
25 V. Volterra: Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni, Rend. Lincei (IV) *3*, 97–105, 141–46, 153–58 (1887).
26 V. Volterra: Sopra le funzioni dipendenti da linee, Rend. Lincei (IV) *3*, 225–30, 274–81 (1887).

ANMERKUNGEN

[1*] Im Sinne von Banach, also der vollständigen metrischen Vektorräume mit invarianter Metrik [d. h., $d(x,y) = d(x-y,0)$] und in jeder der beiden Variablen stetiger Skalarmultiplikation $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$. Lokalkonvexität, d. h. die Existenz einer Basis konvexer Nullumgebungen, wurde erst später von Mazur und Bourbaki zur Definition hinzugenommen, um eine befriedigende Dualitätstheorie zu garantieren.

[2*] Diese Liste liesse sich noch wesentlich erweitern. Das Studium der Originalquellen bleibt unerlässlich, um retrospektiven Fehlinterpretationen, Ungenauigkeiten und anderen Mängeln zu entgehen.

[3*] «*Functionem* voco portionem rectae, quae ductis ope sola puncti fixi et puncti curvae cum curvedine sua dati rectis abscinditur. Tales sunt: Abscissa..., ordinata..., tangens..., radius osculi seu curvedinis..., et aliae innumerare.» (Acta erudit. 1694; s. auch C. I. Gerhardt, G. W. Leibniz Mathematische Schriften (Halle 1858–63; Olms, Hildesheim 1971), Bd. V, S. 306).

[4*] Funktionen, die durch eine einheitliche Formel gegeben sind («functiones continuae»), aber auch «willkürliche Funktionen», z. B. lediglich graphisch gegebene, usw. Einzelheiten hierzu, auch über den Einfluss der Physik (schwingende Saite!) und die weitere Entwicklung, s. Encykl. d. math. Wiss. Bd. II. 1, S. 3–8, 958–71.

[5*] Für Riemann war diese vorwiegend ein anschauliches Hilfsmittel. Erst H. Weyl hat sie in seinem Buch «Die Idee der Riemannschen Fläche» (Teubner, Leipzig 1913) begrifflich scharf gefasst.
[6*] Vgl. Dieudonné [8, S. 86], A. Weil [Œuvres II, 532], A. F. Monna [Nieuw Arch. Wisk. (3) *30*, 247–57 (1982)], E. P. Hamilton und M. Z. Nashed [J. Funct. Anal. *49*, 128–44 (1982)].
[7*] Pincherle verdanken wir auch das Wort «Funktionenraum» (er sagt «Funktionalraum» [Encykl. d. math. Wiss. II, 1.2, S. 777], spazio funzionale [Rend. Bologna (2) *1*, 85 (1896–7)] espace fonctionnel [Math. Ann. *49*, 330 (1897)]. Er sagt in Math. Ann. (ibid.) auch, «Operator» (opérateur) sei 1891 von Carvallo eingeführt worden. «Funktional» (fonctionnelle) als Substantiv stammt von Hadamard, 1904 oder 1905; vgl. [24, S. 251].
[8*] Hadamard nennt u.a. C. Bourlet als Vorläufer, der bereits 1897 (Ann. Éc. Norm. Sup. (3) *14*, 133–89) ähnliche Ideen publizierte.
[9*] Zur Geschichte des Prinzips, das Gauss und Lord Kelvin schon benutzten, siehe [10, 19]. Hilbert hat dann später (1900–01) gezeigt, dass und in welcher Form sich das Prinzip als Beweismethode streng begründen lässt.
[10*] Eine bei Neumann verbliebene kleine Lücke hat Lebesgue 1937 (s. Œuvres IV, 151–66) geschlossen.
[11*] F. G. Tricomi («Integral Equations», Interscience/Wiley, New York 1957; S. 5) macht dazu eine historisch recht interessante Bemerkung betr. Volterra und Fredholm.

 0013-6018/86/060025-11$1.50 + 0.20/0

Covering the sphere with 11 equal circles

The dual counterpart of the well-known problem of densest spherical circle-packing is the problem of thinnest spherical circle-covering, that is the following: To determine the smallest angular radius r_n of n equal circles (or spherical caps) by which the surface of a sphere can be covered without gaps. Contrary to the packing problem, the covering problem has not been intensively investigated. Solutions and conjectures are only known for $n = 2$ to 10 and 12, 14, 16, 20, 32. References to these results and the literature on the problem of thinnest spherical circle-covering can be found in L. Fejes Tóth's book [3] and in a survey paper by Melnyk, Knop and Smith [4].

The first gap in the sequence of the investigated cases is at $n = 11$. The aim of this paper is to fill this gap and to present a good construction for covering the sphere with 11 equal circles.

To a covering system of the circles a graph is associated as suggested by L. Fejes Tóth [3]. The graph is a bipartite graph. It contains two kinds of vertices. The vertices of the first kind are the centres of the spherical circles and the vertices of the second kind are the points of the perimeters of the circles in which the spherical point is only just covered. (In the figures, the vertices of the first kind will be marked by small circles but the vertices of the second kind will not have any special mark.)

The edges of the graph are the shorter great circle arcs joining the centres and the just covering perimetric points of the circles. As a consequence of equality of the circles, all the edges of the graph are of equal length.

For $n = 10$ the solution is due to G. Fejes Tóth [1]. The centres of the circles form a regular bipyramided square antiprism and the angular radius of the circles is $r_{10} = 42° 18' 28.2''$. The graph of the arrangement of the circles can be seen in a simplified stereographic projection in figure 1 where A and J denote the vertices of the pyramids.