

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 41 (1986)  
**Heft:** 1  
  
**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 02.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

yield an expansion of length at most  $n + 1$ . Over the integers, the related algorithms both yield expansions for  $a/b$  of length at most  $a$ .

However, the algorithms differ greatly in size of the terms produced. The largest degree term produced by the Farey series algorithm is clearly  $1/Q_1 Q_2$  which has degree at most  $2q_1 - 1$  since  $\deg Q_2 < \deg Q_1 = q_1$ . The Fibonacci type algorithm yields a bound depending on both degrees of  $P$  and  $Q$ . In the worst case, where  $\deg P = q - 1$ , the largest term may have degree as large as  $2^{q_1 - 1}$ . This behavior again mirrors that of the related algorithms over the ordinary integers.

William A. Webb, Department of Mathematics  
Washington State University

## REFERENCES

- 1 L. Carlitz: Representations of arithmetic functions in  $GF[p^r, x]$ . Duke Math. J. 14, 1121–1137 (1947).
- 2 D. Dobbs and R. McConnel: An Egyptian algorithm for polynomials. El. Math. 39, 126–129 (1984).
- 3 D. R. Hayes: The expression of a polynomial as a sum of three irreducibles. Acta Arith. 11, 461–488 (1966).

© 1986 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/86/060006-06\$1.50 + 0.20/0

## Kleine Mitteilungen

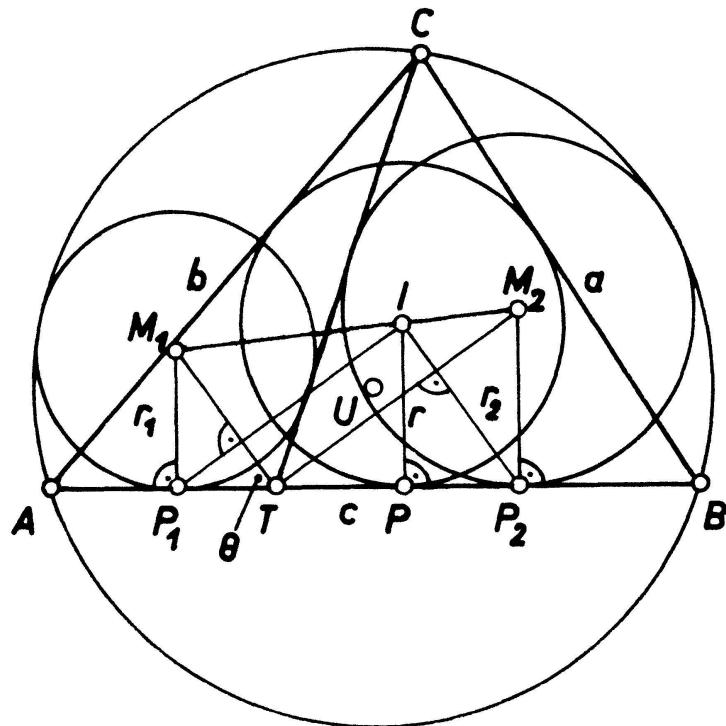
### Über eine Vermutung von Thébault

Die hier behandelte Aufgabe wurde 1938 von V. Thébault in [2] gestellt und erschien in beiden Auflagen von C. Stanley Ogilvys Buch «Tomorrow's Math., Unsolved Problems for the Amateur» (Oxford University Press: 1962, p. 70; 1972, p. 82). Erst 45 Jahre später fand K. B. Taylor eine Lösung, die aber wegen ihrer beträchtlichen Länge (24 Seiten) nur in Form eines knappen Auszugs abgedruckt wurde [1]. In der vorliegenden Note soll ein kurzer Beweis gegeben werden.

**Satz.** *Es sei  $T$  ein beliebig gewählter Punkt auf der Seite  $c$  des Dreiecks  $ABC$ . ( $M_1, r_1$ ) bzw. ( $M_2, r_2$ ) seien die Kreise, die  $AT, TC$  bzw.  $BT, TC$  und den Umkreis (von innen) berühren. Ist  $I$  der Mittelpunkt des Inkreises und  $r$  sein Radius, dann liegen  $M_1, M_2$  und  $I$  kollinear. Bezeichnet  $\theta$  die Hälfte des Winkels  $ATC$ , dann gilt weiter  $\overline{M_1 I} : \overline{IM_2} = \sin^2 \theta : \cos^2 \theta$  und  $r_1 \cos^2 \theta + r_2 \sin^2 \theta = r$ .*

(Anstelle von  $r_1 \cos^2 \theta + r_2 \sin^2 \theta = r$  wurde von Thébault (und Ogilvy) fälschlich  $r_1 + r_2 = r^2 \sec^2 \theta$  angegeben; vgl. [1].)

**Beweis:**  $P_1$  sei der Schnittpunkt von  $AB$  mit dem Lot durch  $I$  auf die innere Winkelsymmetrale des Winkels  $ATC$ , und  $M_1$  sei der Schnittpunkt des Lotes durch  $P_1$  auf  $AB$  mit dieser Winkelsymmetralen;  $M_2$  ist analog zu definieren. Der Kreis mit Mittelpunkt  $M_1$  und Radius  $r_1 = \overline{M_1 P_1}$  berührt dann  $AT$  und  $TC$ . Es bleibt nachzuweisen, dass er auch den Umkreis (von innen) berührt; dies ist äquivalent zu  $\overline{UM_1} = R - r_1$ , wobei  $R$  den



Figur 1

Radius und  $U$  den Mittelpunkt des Umkreises bezeichnet. Ist  $Q_i$  der Schnittpunkt von  $P_i M_i$  mit  $IP_j (i \neq j)$ , dann ist das Teilverhältnis  $(P_i M_i Q_i)$  gleich dem Teilverhältnis  $(P_i T P_j)$ , also  $(P_1 M_1 Q_1) = (Q_2 M_2 P_2)$ . Da die Geraden  $P_1 M_1$  und  $P_2 M_2$  parallel sind, muss der Schnittpunkt  $I$  von  $P_1 Q_2$  mit  $Q_1 P_2$  auf  $M_1 M_2$  liegen. Ist  $P$  der Fusspunkt des Lotes von  $I$  auf  $AB$ , dann gilt  $\overline{P_1 P} = r \tan \theta$  und  $\overline{P P_2} = r \cot \theta$ , also folgt

$$\overline{M_1 I} : \overline{I M_2} = \overline{P_1 P} : \overline{P P_2} = \sin^2 \theta : \cos^2 \theta.$$

Aus  $r_1 = \overline{P_1 T} \tan \theta$  und  $r_2 = \overline{TP_2} \cot \theta$  ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} r_1 \cos^2 \theta + r_2 \sin^2 \theta &= (\overline{P_1 T} + \overline{TP_2}) \sin \theta \cos \theta = (\overline{P_1 P} + \overline{P P_2}) \sin \theta \cos \theta \\ &= r (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = r. \end{aligned}$$

Es bleibt  $\overline{U M_i} = R - r_i (i = 1, 2)$  zu zeigen, wobei man sich aus Symmetriegründen auf  $i = 1$  beschränken kann. Da  $U$  den Abstand  $\frac{c}{2} \cot \gamma$  von  $AB$  hat, ist die Behauptung äquivalent zu

$$\left( P_1 B - \frac{c}{2} \right)^2 + \left( r_1 - \frac{c}{2} \cot \gamma \right)^2 = (R - r_1)^2;$$

die Seiten und Winkel des Dreiecks werden wie üblich mit  $a, b, c$  bzw.  $\alpha, \beta, \gamma$  bezeichnet.

Unter Berücksichtigung von  $R = \frac{c}{2} (\sin \gamma)^{-1}$  erhält man daraus

$$\overline{P_1 B}^2 - c \overline{P_1 B} - c r_1 \cot \gamma = -c r_1 (\sin \gamma)^{-1},$$

also

$$\frac{1 - \cos \gamma}{\sin \gamma} cr_1 = \overline{P_1 B} (c - \overline{P_1 B}).$$

Setzt man  $2s = a + b + c$ , dann gilt  $\overline{P_1 B} = \overline{P_1 P} + \overline{PB} = r \tan \theta + s - b$  und

$\frac{1 - \cos \gamma}{\sin \gamma} = \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{s - c}$ . Daher ist die Behauptung äquivalent zu

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{s - c}{rc} (r \tan \theta + s - b)(s - a - r \tan \theta) \\ &= \frac{s - c}{rc} ((s - a)(s - b) - r(a - b) \tan \theta - r^2 \tan^2 \theta) \\ &= \frac{s - c}{c} \left( \frac{rs}{s - c} - (a - b) \tan \theta - r \tan^2 \theta \right), \end{aligned}$$

wobei  $r^2 = s^{-1}(s - a)(s - b)(s - c)$  verwendet wurde.

Nach Konstruktion war

$$r_1 = \overline{P_1 T} \tan \theta = (\overline{P_1 B} - \overline{TB}) \tan \theta = (r \tan \theta + s - b - \overline{TB}) \tan \theta$$

und nach dem Sinussatz gilt

$$\begin{aligned} \overline{TB} &= a \frac{\sin(2\theta - \beta)}{\sin 2\theta} = a \left( \cos \beta - \sin \beta \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} \right) \\ &= a \left( \cos \beta + \frac{1}{2} \sin \beta (\tan \theta - \cot \theta) \right). \end{aligned}$$

Es folgt

$$r_1 = \frac{a}{2} \sin \beta + (s - b - a \cos \beta) \tan \theta + \left( r - \frac{a}{2} \sin \beta \right) \tan^2 \theta.$$

Wegen  $\frac{ac}{2} \sin \beta = rs$  und  $2ac \cos \beta = a^2 + c^2 - b^2$  erhält man daraus

$$\begin{aligned} cr_1 &= rs + \frac{1}{2} ((a - b + c)c - (a^2 + c^2 - b^2)) \tan \theta + (rc - rs) \tan^2 \theta \\ &= rs - (a - b)(s - c) \tan \theta - r(s - c) \tan^2 \theta, \end{aligned}$$

wie behauptet.

Gerhard Turnwald, Technische Universität, Wien

#### LITERATURVERZEICHNIS

1 K. B. Taylor: Solution of Problem 3887. Amer. Math. Monthly 90, 486–487 (1983).

2 V. Thébault: Problem 3887. Amer. Math. Monthly 45, 482–483 (1938).

## Eine allgemeine logarithmische Ungleichung

In dieser kleinen Mitteilung soll eine allgemeine logarithmische Ungleichung bewiesen werden. Diese Ungleichung hat ihren Ursprung im Mittelwertsatz der Differentialrechnung [4], den Dieudonné ([1], S. 149) kommentiert: «... die wirkliche Natur des Mittelwertsatzes kommt zum Ausdruck, wenn man ihn als Ungleichung, nicht aber als Gleichung schreibt.»

Zuvor erinnern wir an das logarithmische Mittel und das (Potenz-) Mittel der Ordnung  $p$  ( $p \in \mathbf{R}$ ) für zwei Zahlen  $x, y \in \mathbf{R}^+$  in der folgenden *Definition*.

$$L(x, y) := \begin{cases} \frac{x - y}{\log x - \log y} & \text{für } x \neq y \\ x & \text{für } x = y \end{cases},$$

$$M_p(x, y) := \begin{cases} \left( \frac{x^p + y^p}{2} \right)^{1/p} & \text{für } p \neq 0 \\ \sqrt{xy} & \text{für } p = 0 \end{cases}.$$

$\log$  bezeichnet hier die natürliche Logarithmus-Funktion.

**Satz.** Für  $0 < a < b$  sei die Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  positiv und stetig in  $[a, b]$ . Weiterhin sei  $f$  differenzierbar in  $]a, b[$  und  $f'$  dort positiv. Dann gilt:

$$M_0(f(a), f(b)) < L(f(a), f(b)) < M_{1/3}(f(a), f(b)). \quad (1)$$

**Beweis:** Wir definieren  $g: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  und  $h: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  durch

$$g(x) := \log f(x) + \frac{1}{M_0(f(a), f(b))} (f(a) - f(x)),$$

$$h(x) := \log f(x) + \frac{1}{M_{1/3}(f(a), f(b))} (f(a) - f(x)).$$

Nach dem Mittelwertsatz existieren dann  $c, d \in ]a, b[$  derart, dass

$$g(b) - g(a) = - (b - a) \frac{f'(c)[M_0(f(a), f(c)) - f(a)]^2}{2[M_0(f(a), f(c))]^3} < 0,$$

$$h(b) - h(a) = (b - a) \frac{f'(d)[\sqrt[3]{f(d)} - \sqrt[3]{f(a)}]^4}{f(d)[\sqrt[3]{f(d)} + \sqrt[3]{f(a)}]^4} > 0.$$

Die Ungleichung (1) ist nun eine einfache Folgerung aus

$$g(b) - g(a) < 0 < h(b) - h(a).$$

Bemerkung: Mit  $f$  erfüllt auch die Funktion  $\sqrt{f}$  die Voraussetzungen des Satzes. Daraus ergibt sich folgende offensichtliche linksseitige Verschärfung von (1):

$$M_0(\sqrt{f(a)}, \sqrt{f(b)}) \cdot M_1(\sqrt{f(a)}, \sqrt{f(b)}) < L(f(a), f(b)).$$

Zusammen mit der bekannten ([3], S. 76) Abschätzung

$$M_{1/3}(f(a), f(b)) < M_{1/2}(f(a), f(b)) < M_1(f(a), f(b)) \quad (2)$$

liefert sie eine entsprechende Ungleichungskette.

Für Anwendungen wichtige, teilweise bekannte Ungleichungsketten lassen sich auf die aus (1) und (2) gebildete Ungleichungskette zurückführen. Abschliessend sollen noch zwei solche Spezialfälle angegeben werden.

a)  $f = id$  ([3], S. 273)

$$\sqrt{ab} < \frac{a-b}{\log a - \log b} < \left( \frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}{2} \right)^3 < \left( \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} \right)^2 < \frac{a+b}{2} \quad (3)$$

Mit  $t := \frac{b}{a} > 1$  lässt (3) sich zu der Ungleichungskette

$$\frac{2(t-1)}{t+1} < \frac{4(t-1)}{(\sqrt{t+1})^2} < \frac{8(t-1)}{(\sqrt[3]{t+1})^3} < \log t < \frac{t-1}{\sqrt{t}} \quad (4)$$

umformen, wobei die rechtsstehende Ungleichung von Karamata ([3], S. 272) stammt. (4) ist offensichtlich eine Verschärfung der bekannten elementaren Ungleichung

$$\frac{t-1}{t} < \log t < t-1 \quad \text{für } t > 1.$$

Darüber hinaus sei noch bemerkt, dass (4) äquivalent ist mit den beiden Ungleichungsketten ([2], S. 55; [3], S. 273)

$$\begin{aligned} \frac{2}{2a+1} &< \frac{4}{2a+1+2\sqrt{a(a+1)}} < \frac{8}{2a+1+3(\sqrt[3]{a^2(a+1)} + \sqrt[3]{a(a+1)^2})} \\ &< \log\left(1 + \frac{1}{a}\right) < \frac{1}{\sqrt{a(a+1)}} \quad \text{für } a > 0, \\ \frac{2b}{2+b} &< \frac{4b}{2+b+2\sqrt{1+b}} < \frac{8b}{2+b+3(\sqrt[3]{1+b} + \sqrt[3]{(1+b)^2})} \\ &< \log(1+b) < \frac{b}{\sqrt{1+b}} \quad \text{für } b > 0. \end{aligned}$$

Mit  $t := \frac{1}{2} \log \frac{b}{a} > 0$  lässt (3) sich auch umformen zu der elementaren Ungleichungskette

$$\frac{1}{\sinh t} < \frac{1}{t} < \frac{\left(\cosh \frac{t}{3}\right)^3}{\sinh t} < \frac{\left(\cosh \frac{t}{2}\right)^2}{\sinh t} < \frac{1}{\tanh t}.$$

b)  $f = \exp$

$$e^{\frac{a+b}{2}} < \frac{e^a - e^b}{a - b} < \left(\frac{e^{\frac{a}{3}} + e^{\frac{b}{3}}}{2}\right)^3 < \left(\frac{e^{\frac{a}{2}} + e^{\frac{b}{2}}}{2}\right)^2 < \frac{e^a + e^b}{2}$$

Dieter Rüthing, Paderborn, BRD

## LITERATURVERZEICHNIS

- 1 J. Dieudonné: Grundzüge der modernen Analysis. Vieweg-Verlag, Braunschweig 1972.
- 2 E. R. Love: Some logarithm inequalities. Math. Gaz. 64, 55–57 (1980).
- 3 D. S. Mitrinović: Analytic Inequalities. Springer Verlag, New York–Heidelberg–Berlin 1970.
- 4 D. Rüthing: A derivation of some classical inequalities from the mean value theorem. Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. 15, 653–659 (1984); 16, 149 (1985).

**Nachtrag der Redaktion.** Bei der Drucklegung dieser Kleinen Mitteilung sind wir auf eine Note von T. P. Lin (The power means and the logarithmic mean; Am. Math. Monthly 81 (1974), p. 879–883) aufmerksam geworden, in der aus der Ungleichung

$$\sqrt{ab} < \frac{a - b}{\log a - \log b} < \left(\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}{2}\right)^3, \quad \text{für } a > 0, b > 0, a \neq b$$

die Abschätzung (1) mit wesentlich schwächeren Restriktionen für  $f$  gefolgert wird. Es genügt, dass  $f$  positiv und  $f(a) \neq f(b)$  ist.

© 1986 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/86/060014-03\$1.50 + 0.20/0

## Aufgaben

**Aufgabe 917.** Man betrachte die Menge aller einem gegebenen Dreieck  $ABC$  einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecke  $A'B'C'$  mit  $A' \in \overline{BC}$ ,  $B' \in \overline{CA}$ ,  $C' \in \overline{AB}$  und den Seitenmittten  $L \in B'C'$ ,  $M \in C'A'$ ,  $N \in A'B'$ .

Man zeige:  $L, M, N$  liegen auf je einer festen Geraden  $l, m, n$ .

L. Kuipers, Sierre

Lösung: Wir betrachten allgemeiner eine Schar zueinander ähnlicher Dreiecke  $A'B'C'$  mit  $A' \in \overline{BC}$ ,  $B' \in \overline{CA}$ ,  $C' \in \overline{AB}$  und zeigen: Jede Menge von einander entsprechenden Punkten dieser Dreiecke liegt auf einer jeweils festen Geraden.

Zum Beweis sei  $A$  als Nullpunkt der komplexen Ebene gewählt. O. B. d. A. sei  $\not\propto BAC + \not\propto B'A'C' \neq \pi$  angenommen. Bezeichnen wir noch mit  $a, a', \dots$  die den Punkten  $A, A', \dots$  entsprechenden komplexen Zahlen, so gilt für jedes der betrachteten Dreiecke mit geeigneten  $x, y, z \in \mathbb{R}$ :

$$a' = b + x(c - b), \quad b' = yc, \quad c' = zb. \quad (1)$$