Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 41 (1986)
Heft: 1

Artikel: Zum Satz von Holditch in der euklidischen Ebene
Autor: Pottmann, Helmut
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39464

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 21.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

El. Math. Band 41 Nr. 1 Seiten 1–24 Basel, 10. Januar 1986

Zum Satz von Holditch in der euklidischen Ebene

Der klassische Satz von H. Holditch [3] hat in letzter Zeit wiederholt das Interesse der Geometer auf sich gezogen und wurde dabei auf verschiedenste Arten verallgemeinert und in andere Geometrien übertragen (vgl. dazu die Literaturzitate in [2] und [5]). Die folgenden Zeilen sind einer Erweiterung des Holditch-Satzes in der euklidischen Ebene gewidmet, wobei vor allem die Flächeninhalte kinematisch erzeugter unbeschränkter Bereiche zur Diskussion stehen (vgl. [5] und [6]).

1. Auf die durch $(O;x,y)$ kartesisch koordinatisierte euklidische Ebene Σ üben wir vermöge

$$\begin{aligned} x_0 &= a_0(t) + x\cos\varphi(t) - y\sin\varphi(t), \\ y_0 &= b_0(t) + x\sin\varphi(t) + y\cos\varphi(t), \quad t\in I\subset\mathbf{R}, \quad a_0, b_0, \varphi\in C^1(I) \end{aligned} \tag{1}$$

eine stetig differenzierbare Schar von gleichsinnig kongruenten Abbildungen aus und erhalten so einen *ebenen euklidischen* C^1*-Zwanglauf* Σ/Σ_0 der bewegten *Gangebene* Σ gegenüber der ruhend gedachten *Rastebene* Σ_0, welche auf das kartesische Koordinatensystem $(O_0;x_0,y_0)$ bezogen ist und für jedes $t\in I$ die Neulage Σ^t von Σ trägt (siehe [4, 7]). Der Zwanglauf heisst *geschlossen* mit der minimalen Periode T und der *Drehzahl* $\nu\in\mathbf{Z}$, sofern ein kleinstes reelles $T>0$ mit

$$a_0(t+T) = a_0(t), \quad b_0(t+T) = b_0(t), \quad \varphi(t+T) = \varphi(t) + 2\pi\nu \tag{2}$$

existiert. Durch (1) und (2) wird mit konstanten Werten für x und y die im Sinne wachsender Parameter orientierte, geschlossene *Bahnkurve* des Punktes $X(x,y)\in\Sigma$ erfasst. Bei einer vollen Periode eines geschlossenen Zwanglaufs ($t\in[0,T]$) können einzelne Punkte ihre Bahnen auch mehrmals durchlaufen. Wir bezeichnen nun (im 1. Abschnitt) die mit den jeweiligen Durchlaufzahlen multiplizierten orientierten Flächeninhalte der Bahnkurven als *Bahnflächeninhalte.* Dann besagt eine bekannte Verallgemeinerung des Holditchschen Satzes (vgl. [1, S. 142] oder [2]): Durchlaufen zwei Punkte $A, B\in\Sigma$ mit den Koordinaten $(0,0)$ bzw. $(a+b,0)$ bei einem geschlossenen ebenen euklidischen C^1-Zwanglauf Σ/Σ_0 mit der Drehzahl ν die Bahnen k_A bzw. $k_B\subset\Sigma_0$ mit den Bahnflächeninhalten $F(A)$ bzw. $F(B)$, so beschreibt ein mit A und B kollinearer Punkt $X(a,0)\in\Sigma$ eine Bahnkurve k vom Bahnflächeninhalt

$$F(X) = [aF(B) + bF(A)]/(a+b) - \nu\pi ab. \tag{3}$$

Hieraus schliesst man auf den

Satz 1. *Durchlaufen die Punkte A_i und B_i der beiden Geraden $g_i (i = 1, 2)$ im Rahmen der geschlossenen ebenen euklidischen C^1-Zwangläufe Z_i mit den Drehzahlen ν_i mit gleicher Orientierung und derselben Durchlaufzahl die Kurven k_A bzw. k_B, so erzeugen die Punkte $X_i \in g_i$ (mit $\overline{A_i X_i} = \lambda_i a, \overline{X_i B_i} = \lambda_i b$)[1]) Bahnkurven k_i, für welche die Differenz $F = F_1 - F_2$ ihrer Bahnflächeninhalte F_i unabhängig von k_A und k_B ist. Es gilt nämlich:*

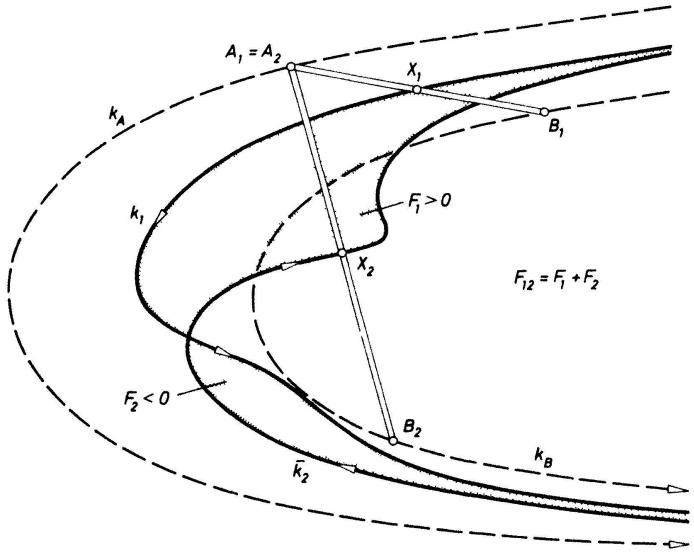
$$F = (\nu_2 \lambda_2^2 - \nu_1 \lambda_1^2) \pi a b. \tag{4}$$

Dabei bedeutet die Formulierung «mit gleicher Orientierung», dass die Punkte A_i (bzw. B_i) – abgesehen von den nicht notwendig gleichen Rückläufen – der Kurve k_A (bzw. k_B) unter Z_1 und Z_2 dieselbe Orientierung aufprägen. Dies ist für die wesentliche Forderung der Übereinstimmung der Bahnflächeninhalte $(F(A_1) = F(A_2), F(B_1) = F(B_2))$ notwendig. Satz 1 enthält mit $k_A = k_B, \nu_2 = 1$ und $\lambda_1 = 0 (\Rightarrow k_1 = k_A)$ den klassischen Holditch-Satz.

2. Wir wählen nun als Führungskurven k_A und k_B *Randkurven unbeschränkter Bereiche* der Rastebene. Sie seien durch globale $C^1(\mathbf{R})$-Wege c_A, c_B mit

$$c_A, c_B : u \in \mathbf{R} \mapsto P_A(u) (P_B(u)) \in \mathbf{R}^2, \quad k_A = c_A(\mathbf{R}), \quad k_B = c_B(\mathbf{R}) \tag{5}$$

darstellbar, wobei die Punktmengen $c_A(\mathbf{R})$ und $c_B(\mathbf{R})$ für $u \to +\infty$ und $u \to -\infty$ nicht beschränkt sein sollen. Weiters mögen in den bei projektiver Erweiterung von $\mathbf{R}^2 (= \Sigma_0)$ existierenden Fernpunkten dieser Kurven die Grenzlagen der Tangenten existieren. Nun bestimmen die analog zu Satz 1 erklärten Kurven k_1 und k_2 einen *Bahnflächeninhalt* F_{12}: Den Kurven k_i wird unter Z_i eine Orientierung aufgeprägt. Wird jetzt k_2 zu $\bar{k}_2$ umorientiert, so ist F_{12} die Summe der orientierten Inhalte der in den Schnittpunkten von k_1 und k_2 zusammenhängenden, von k_1 und $\bar{k}_2$ berandeten Bereiche (Fig. 1). Eine exakte Definition



Figur 1. Zur Definition des Bahnflächeninhaltes F_{12}.

1) Die Abstände sind nach Auszeichnung einer positiven Richtung auf g_i mit Vorzeichen zu versehen.

von F_{12} findet man in [5] und auch im Beweis des folgenden Ergebnisses, für dessen Formulierung sich folgende Auffassung als zweckmässig erweist: Anstelle der Betrachtung zweier Zwangläufe gemäss Satz 1 verwenden wir einen als *Zweischlag* bezeichneten, auf der Rastebene Σ_0 liegenden Mechanismus, der aus den beiden starren Geraden $g_i = A_i B_i$ besteht, welche im Punkt $A := A_1 = A_2$ durch ein Drehgelenk verbunden sind (Fig. 1). Durch Führung der drei Punkte A, B_1, B_2 längs gegebener Bahnen der Rastebene Σ_0 erhalten wir ein «Getriebe» (i. a. vom Freiheitsgrad 1) mit zwei (durch die g_i repräsentierten) bewegten Systemen Σ_i und dem ruhenden System Σ_0. Nun gilt:

Satz 2. *Bewegen wir einen Zweischlag $B_1 A B_2$ so, dass sein Gelenk A und die auf den Schenkeln $g_i = AB_i$ $(i = 1,2)$ liegenden Punkte B_i die gesamten, durch* (5) *darstellbaren Randkurven k_A bzw. k_B unbeschränkter Bereiche durchlaufen*[2]*, dann erzeugen die Punkte $X_i \in g_i$ $(\overline{AX_i} = \lambda_i a,\ \overline{X_i B_i} = \lambda_i b$ mit $a + b, \lambda_i \in \mathbf{R}^+)$ Bahnen k_i, welche den Bahnflächeninhalt*

$$F_{12} = [\lambda_1 \lambda_2 (\sin \gamma_2 - \sin \gamma_1) + \delta_2 \lambda_2^2 - \delta_1 \lambda_1^2] ab/2 \tag{6}$$

bestimmen. Hierin bezeichnen wir mit $\delta_i \in \mathbf{R}$ den Gesamtdrehwinkel von g_i und mit γ_1, γ_2 die zu den Fernlagen $t = \pm\infty$ gehörigen Grenzwerte

$$\gamma_1 := \lim_{t \to +\infty} \gamma(t), \quad \gamma_2 := \lim_{t \to -\infty} \gamma(t) \tag{7}$$

des Zweischlagwinkels $\gamma(t) = \sphericalangle B_1^t A^t B_2^t$[3]*.*

Beweis: I. Sei $Z = \Sigma/\Sigma_0$ ein durch (1) beschriebener, nicht notwendig geschlossener ebener euklidischer C^1-Zwanglauf, $X(x,y)$ ein beliebiger Punkt der Gangebene Σ sowie O_0 der Ursprung $(0,0)$ der Rastebene Σ_0. Dann überstreichen die Strecken $\overline{O_0 X^t}$ $(t \in I = [r,s])$ eine sogenannte «Sektorenfläche», deren orientierter Inhalt $\tilde{F}(X)$ mittels

$$\tilde{F}(X) = \frac{1}{2} \int_r^s (x_0 \dot{y}_0 - \dot{x}_0 y_0)\, dt \quad \text{bei} \quad \dot{x}_0 = dx_0/dt, \quad \dot{y}_0 = dy_0/dt$$

berechnet werden kann. Hierbei sind die C^1-Funktionen $x_0(t)$ und $y_0(t)$ der Zwanglaufdarstellung (1) zu entnehmen. Dies liefert mit $\tilde{F}(O)$ als Sektorenflächeninhalt des Ursprungs $O(0,0)$ der Gangebene Σ und geeigneten reellen Konstanten C, D die in [1, S. 117] angeführte Formel

$$\tilde{F}(X) = \tilde{F}(O) + \frac{\tilde{\delta}}{2}(x^2 + y^2 + Cx + Dy),$$

wobei

$$\tilde{\delta} = \int_r^s \dot{\varphi}(t)\, dt \quad \text{mit} \quad \dot{\varphi} = d\varphi/dt$$

---

2) Dies ist nur bei spezieller gegenseitiger Lage der Kurven k_A und k_B möglich und setzt jedenfalls das Zusammenfallen ihrer Fernpunkte voraus.

3) Die durch die Bewegung der g_i definierten Zwangläufe Z_i seien auf den gemeinsamen Parameter t bezogen, und die Durchlaufung erfolge im Sinne wachsender Parameter von der Fernlage $t = -\infty$ bis zur Fernlage $t = +\infty$. X^t bezeichne die zum Parameterwert t gehörige Lage des Punktes X in der Rastebene Σ_0.

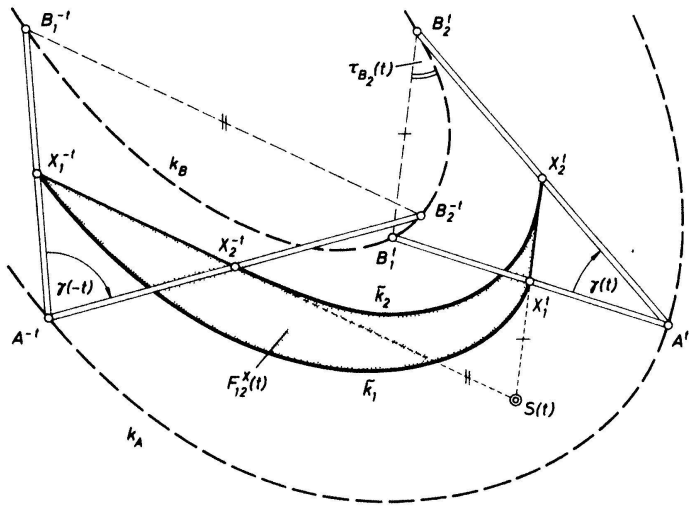
den Gesamtdrehwinkel von Z bezeichnet. Für die Sektorenflächeninhalte von drei kollinearen Punkten $A(0,0), B(a+b,0), X(a,0) \in \Sigma$ besteht demnach der Holditch-Satz

$$\tilde{F}(X) = [a\tilde{F}(B) + b\tilde{F}(A)]/(a+b) - ab\tilde{\delta}/2. \tag{8}$$

Wegen der freien Wahl des Rastkoordinatenursprungs O_0 bleibt (8) auch dann gültig, wenn ein anderer Punkt S der Rastebene als Bezugspunkt für die Sektorenflächen dient. Für einen geschlossenen Zwanglauf $Z(2)$ ist $\tilde{\delta} = 2\pi\nu$, womit auch die eingangs verwendete Formel (3) bewiesen ist.

II. Nach diesen Vorbereitungen soll nun unser Satz 2 bewiesen werden: Wir schränken die durch die g_i bestimmten Zwangläufe Z_i auf das Parameterintervall $[-t, t]$ $(t \in \mathbf{R}^+)$ ein. Die entstehenden i. a. nichtgeschlossenen Zwangläufe $\tilde{Z}_i(t)$ mögen die Gesamtdrehwinkel $\tilde{\delta}_i(t)$ besitzen. Aus dem bei geeigneter Parametrisierung der Z_i – abgesehen von endlich vielen Ausnahmestellen t_k – existierenden Schnittpunkt $S(t)$ der Geraden $X_1{}^tX_2{}^t$ und $X_1{}^{-t}X_2{}^{-t}$ werden die unter $\tilde{Z}_i$ erzeugten Bahnkurvenstücke durch Sektorenflächen projiziert, für deren orientierte Inhalte nach (8) für $i = 1, 2$ gilt:

$$\tilde{F}(X_i) = [a\tilde{F}(B_i) + b\tilde{F}(A)]/(a+b) - \lambda_i^2 ab\tilde{\delta}_i(t)/2. \tag{9}$$



Figur 2

Die Bahnkurvenstücke $\tilde{k}_1$ und $\tilde{k}_2$ der Punkte X_1 und X_2 werden nun durch die Strecken $X_1{}^tX_2{}^t$ und $X_2{}^{-t}X_1{}^{-t}$ zu einer geschlossenen Kurve ergänzt, die bei Durchlaufung in der Reihenfolge $X_1{}^tX_2{}^tX_2{}^{-t}X_1{}^{-t}X_1{}^t$ den orientierten Inhalt

$$F_{12}^X = \tilde{F}(X_1) - \tilde{F}(X_2)$$

besitzt (Fig. 2); analog definieren wir den Inhalt $F_{12}^B(t)$. Bezeichnen wir weiters mit Δ_i die orientierten Dreiecksflächeninhalte

$$\Delta_1(t) := F(\Delta SB_1{}^tB_2{}^t), \quad \Delta_2(t) := F(\Delta SB_1{}^{-t}B_2{}^{-t}),$$

so folgern wir über

$$F_{12}^{B}(t) = \tilde{F}(B_1) - \tilde{F}(B_2) + \Delta_1(t) - \Delta_2(t)$$

aus (9) die Beziehung

$$F_{12}^{X}(t) = \frac{a}{a+b}\,[F_{12}^{B}(t) + \Delta_2(t) - \Delta_1(t)] + [\tilde{\delta}_2(t)\lambda_2^2 - \tilde{\delta}_1(t)\lambda_1^2]\,ab/2. \tag{10}$$

Für die Differenz der Dreiecksflächen Δ_i finden wir

$$\frac{a}{a+b}\,[\Delta_2(t) - \Delta_1(t)] = \lambda_1\lambda_2 ab\,[\sin\gamma(-t) - \sin\gamma(t)]/2. \tag{11}$$

Mit $\tau_{B_i}(t) \in [0, \pi]$ als Winkel zwischen k_B und der Strecke $B_1'B_2'$ in B_i' haben wir für $F_{12}^{B}(t)$ folgende Abschätzung:

$$|F_{12}^{B}(t)| \leqq (\lambda_1 + \lambda_2)^2 (a+b)^2 [\sin\tau_{B_1}(t) + \sin\tau_{B_2}(t) + \sin\tau_{B_1}(-t) + \sin\tau_{B_2}(-t)]$$
$$\forall t > t_0 \in \mathbf{R}^+.$$

Also strebt $F_{12}^{B}(t)$ für $t \to +\infty$ wegen

$$\lim_{t\to+\infty} \tau_{B_i}(t) = \lim_{t\to+\infty} \tau_{B_i}(-t) = 0$$

gegen Null. Damit geht schliesslich (10) beim Grenzübergang $t \to +\infty$ unter Beachtung von (7), (11) und

$$\lim_{t\to+\infty} F_{12}^{X}(t) =: F_{12}, \quad \lim_{t\to+\infty} \tilde{\delta}_i(t) = \delta_i$$

in die Behauptung (6) über. □

Unsere Beweisführung zeigt, dass $F_{12}(= -F_{21})$ parameterinvariant ist, jedoch von der durch die Z_i vermittelten Orientierung der Kurven k_A, k_B abhängt: Lässt man nämlich entgegen unserer bisherigen Annahme die Bewegung von der (ursprünglichen) Fernlage $+\infty$ nach $-\infty$ ablaufen, so vertauschen γ_1 und γ_2 ihre Bedeutung und die Gesamtdrehwinkel δ_i wechseln ihr Vorzeichen. Dies hat – wie es nach unserer Definition sein muss – gemäss (6) einen Vorzeichenwechsel von F_{12} zur Folge. Weiters erkennen wir, dass sämtliche der in F_{12} aufsummierten Inhalte existieren (z. B. F_1 und F_2 in Fig. 1) und nicht etwa ein Grenzwert vom Typ «$\infty - \infty$» vorliegt.

Selbstverständlich stehen die Winkel γ_i und δ_i durch die Abhängigkeit

$$\gamma_1 + \delta_1 - \delta_2 \equiv \gamma_2 (\mathrm{mod}\, 2\pi)$$

in Beziehung.

In Satz 2 liegt mit $k_A = k_B$ und $\lambda_1 = 0$ die in [5] studierte Erweiterung des Holditch-Satzes für Führungskurven, die einen unbeschränkten konvexen Bereich der Rastebene beran-

den. In diesem Fall erweist sich k_2 als einfache Kurve und δ_2 fällt mit dem Tangentendrehwinkel von k_A zusammen.

Helmut Pottmann, TU Wien

LITERATURVERZEICHNIS

1 W. Blaschke und H. R. Müller: Ebene Kinematik. Oldenbourg, München 1956.
2 L. Hering: Sätze vom Holditch-Typ für ebene Kurven. El. Math. *38*, 39–49 (1983).
3 H. Holditch: Geometrical Theorem. Q. J. Pure Appl. Math. *2* (1858).
4 H. R. Müller: Kinematik. Sammlg. Göschen (Bd. 584/584a), Berlin 1963.
5 H. Pottmann: Holditch-Sicheln. Arch. Math. *44*, 373–378 (1985).
6 H. Pottmann: Ein isotropes Analogon zum Satz von Holditch. J. of Geometry (im Druck).
7 W. Wunderlich: Ebene Kinematik. Bibl. Inst. HTB (Bd. 447/447a), Mannheim/Wien/Zürich 1970.

© 1986 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/86/060001-06$1.50 + 0.20/0

The Farey series of polynomials over a finite field

Introduction

The ordinary Farey series of order n, $F_n = \{h/k \mid 0 \le h \le k \le n, (h,k) = 1\}$ has a number of interesting intrinsic properties as well as having applications to such diverse areas as approximating irrational numbers, solving the Diophantine equation

$$a/b = 1/x_1 + \cdots + 1/x_k$$

(Egyptian fraction problem), and the Hardy-Littlewood method of analytic number theory.

If p is a prime, let $GF(p^r)$ be the finite field with p^r elements, and $GF[p^r, x]$ the ring of polynomials over this field. The Farey series $\mathfrak{F}_n$ is defined as:

$$\mathfrak{F}_n = \{P/Q \mid P, Q \in GF[p^r, x], \quad \deg P < \deg Q \le n, \quad (P,Q) = 1, \quad Q \text{ monic}\}.$$

We let $GF(p^r, x)$ denote the field of rational functions over $GF(p^r)$; $v(P/Q) = \deg Q - \deg P$ the usual degree valuation on $GF(p^r, x)$; $GF\{p^r, x\}$ the completion of $GF(p^r, x)$ with respect to v, so

$$GF\{p^r, x\} = \left\{\alpha = \sum_{j=t}^{\infty} a_j x^{-j} \mid a_j \in GF(p^r)\right\}$$

where $v(\alpha) = t$ and $|\alpha| = (p^r)^{-v(\alpha)} = p^{-rt}$. (The degree of the zero polynomial is taken to be $-\infty$.) Also, the distance between α und β is given by $|\alpha - \beta|$, which is easily seen to be an ultrametric on $GF\{p^r, x\}$. The set $\mathfrak{I} = \{\alpha \mid v(\alpha) > 0\}$ consists of all elements of the form