

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 41 (1986)  
**Heft:** 1

**Artikel:** Zum Satz von Holditch in der euklidischen Ebene  
**Autor:** Pottmann, Helmut  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-39464>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 02.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

El. Math.

Band 41

Nr. 1

Seiten 1–24

Basel, 10. Januar 1986

## Zum Satz von Holditch in der euklidischen Ebene

Der klassische Satz von H. Holditch [3] hat in letzter Zeit wiederholt das Interesse der Geometer auf sich gezogen und wurde dabei auf verschiedenste Arten verallgemeinert und in andere Geometrien übertragen (vgl. dazu die Literaturzitate in [2] und [5]). Die folgenden Zeilen sind einer Erweiterung des Holditch-Satzes in der euklidischen Ebene gewidmet, wobei vor allem die Flächeninhalte kinematisch erzeugter unbeschränkter Bereiche zur Diskussion stehen (vgl. [5] und [6]).

1. Auf die durch  $(O; x, y)$  kartesisch koordinatierte euklidische Ebene  $\Sigma$  üben wir vermöge

$$\begin{aligned}x_0 &= a_0(t) + x \cos \varphi(t) - y \sin \varphi(t), \\y_0 &= b_0(t) + x \sin \varphi(t) + y \cos \varphi(t), \quad t \in I \subset \mathbb{R}, \quad a_0, b_0, \varphi \in C^1(I)\end{aligned}\tag{1}$$

eine stetig differenzierbare Schar von gleichsinnig kongruenten Abbildungen aus und erhalten so einen *ebenen euklidischen  $C^1$ -Zwanglauf*  $\Sigma/\Sigma_0$  der bewegten *Gan ge b e n e*  $\Sigma$  gegenüber der ruhend gedachten *Rast ebene*  $\Sigma_0$ , welche auf das kartesische Koordinaten system  $(O_0; x_0, y_0)$  bezogen ist und für jedes  $t \in I$  die Neulage  $\Sigma'$  von  $\Sigma$  trägt (siehe [4, 7]). Der Zwanglauf heisst *geschlossen* mit der minimalen Periode  $T$  und der *Drehzahl*  $v \in \mathbb{Z}$ , sofern ein kleinstes reelles  $T > 0$  mit

$$a_0(t + T) = a_0(t), \quad b_0(t + T) = b_0(t), \quad \varphi(t + T) = \varphi(t) + 2\pi v\tag{2}$$

existiert. Durch (1) und (2) wird mit konstanten Werten für  $x$  und  $y$  die im Sinne wachsender Parameter orientierte, geschlossene *Bahnkurve* des Punktes  $X(x, y) \in \Sigma$  erfasst. Bei einer vollen Periode eines geschlossenen Zwanglaufs ( $t \in [0, T]$ ) können einzelne Punkte ihre Bahnen auch mehrmals durchlaufen. Wir bezeichnen nun (im 1. Abschnitt) die mit den jeweiligen Durchlaufzahlen multiplizierten orientierten Flächeninhalte der Bahnkurven als *Bahnflächeninhalte*. Dann besagt eine bekannte Verallgemeinerung des Holditchschen Satzes (vgl. [1, S. 142] oder [2]): Durchlaufen zwei Punkte  $A, B \in \Sigma$  mit den Koordinaten  $(0, 0)$  bzw.  $(a + b, 0)$  bei einem geschlossenen ebenen euklidischen  $C^1$ -Zwanglauf  $\Sigma/\Sigma_0$  mit der Drehzahl  $v$  die Bahnen  $k_A$  bzw.  $k_B \subset \Sigma_0$  mit den Bahnflächeninhalten  $F(A)$  bzw.  $F(B)$ , so beschreibt ein mit  $A$  und  $B$  kollinearer Punkt  $X(a, 0) \in \Sigma$  eine Bahnkurve  $k$  vom Bahnflächeninhalt

$$F(X) = [aF(B) + bF(A)]/(a + b) - v\pi ab.\tag{3}$$

Hieraus schliesst man auf den

**Satz 1.** Durchlaufen die Punkte  $A_i$  und  $B_i$  der beiden Geraden  $g_i$  ( $i = 1, 2$ ) im Rahmen der geschlossenen ebenen euklidischen  $C^1$ -Zwangsläufe  $Z_i$  mit den Drehzahlen  $v_i$  mit gleicher Orientierung und derselben Durchlaufzahl die Kurven  $k_A$  bzw.  $k_B$ , so erzeugen die Punkte  $X_i \in g_i$  (mit  $\overline{A_i X_i} = \lambda_i a$ ,  $\overline{X_i B_i} = \lambda_i b$ )<sup>1)</sup> Bahnkurven  $k_i$ , für welche die Differenz  $F = F_1 - F_2$  ihrer Bahnflächeninhalte  $F_i$  unabhängig von  $k_A$  und  $k_B$  ist. Es gilt nämlich:

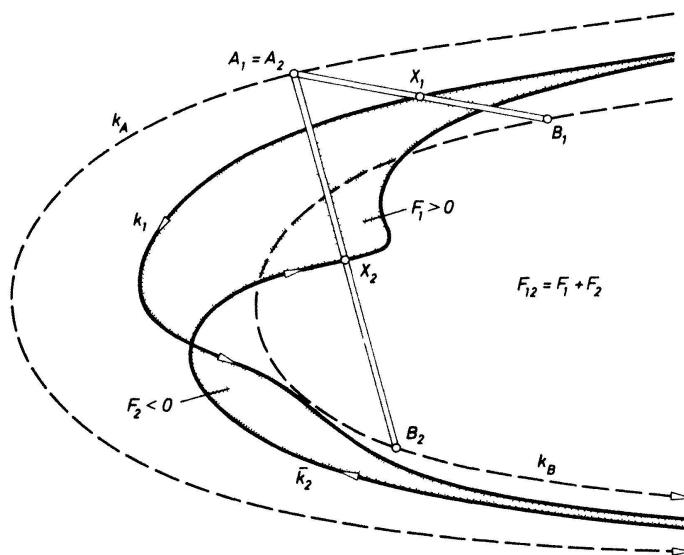
$$F = (v_2 \lambda_2^2 - v_1 \lambda_1^2) \pi ab. \quad (4)$$

Dabei bedeutet die Formulierung «mit gleicher Orientierung», dass die Punkte  $A_i$  (bzw.  $B_i$ ) – abgesehen von den nicht notwendig gleichen Rückläufen – der Kurve  $k_A$  (bzw.  $k_B$ ) unter  $Z_1$  und  $Z_2$  dieselbe Orientierung aufprägen. Dies ist für die wesentliche Forderung der Übereinstimmung der Bahnflächeninhalte ( $F(A_1) = F(A_2)$ ,  $F(B_1) = F(B_2)$ ) notwendig. Satz 1 enthält mit  $k_A = k_B$ ,  $v_2 = 1$  und  $\lambda_1 = 0$  ( $\Rightarrow k_1 = k_A$ ) den klassischen Holditch-Satz.

**2.** Wir wählen nun als Führungskurven  $k_A$  und  $k_B$  *Randkurven unbeschränkter Bereiche* der Rastebene. Sie seien durch globale  $C^1(\mathbf{R})$ -Wege  $c_A$ ,  $c_B$  mit

$$c_A, c_B: u \in \mathbf{R} \mapsto P_A(u)(P_B(u)) \in \mathbf{R}^2, \quad k_A = c_A(\mathbf{R}), \quad k_B = c_B(\mathbf{R}) \quad (5)$$

darstellbar, wobei die Punktmengen  $c_A(\mathbf{R})$  und  $c_B(\mathbf{R})$  für  $u \rightarrow +\infty$  und  $u \rightarrow -\infty$  nicht beschränkt sein sollen. Weiters mögen in den bei projektiver Erweiterung von  $\mathbf{R}^2$  ( $= \Sigma_0$ ) existierenden Fernpunkten dieser Kurven die Grenzlagen der Tangenten existieren. Nun bestimmen die analog zu Satz 1 erklärten Kurven  $k_1$  und  $k_2$  einen *Bahnflächeninhalt*  $F_{12}$ : Den Kurven  $k_i$  wird unter  $Z_i$  eine Orientierung aufgeprägt. Wird jetzt  $k_2$  zu  $\bar{k}_2$  umorientiert, so ist  $F_{12}$  die Summe der orientierten Inhalte der in den Schnittpunkten von  $k_1$  und  $k_2$  zusammenhängenden, von  $k_1$  und  $\bar{k}_2$  berandeten Bereiche (Fig. 1). Eine exakte Definition



Figur 1. Zur Definition des Bahnflächeninhaltes  $F_{12}$ .

1) Die Abstände sind nach Auszeichnung einer positiven Richtung auf  $g_i$  mit Vorzeichen zu versehen.

von  $F_{12}$  findet man in [5] und auch im Beweis des folgenden Ergebnisses, für dessen Formulierung sich folgende Auffassung als zweckmäßig erweist: Anstelle der Betrachtung zweier Zwangsläufe gemäß Satz 1 verwenden wir einen als *Zweischlag* bezeichneten, auf der Rastebene  $\Sigma_0$  liegenden Mechanismus, der aus den beiden starren Geraden  $g_i = A_i B_i$  besteht, welche im Punkt  $A := A_1 = A_2$  durch ein Drehgelenk verbunden sind (Fig. 1). Durch Führung der drei Punkte  $A, B_1, B_2$  längs gegebener Bahnen der Rastebene  $\Sigma_0$  erhalten wir ein «Getriebe» (i. a. vom Freiheitsgrad 1) mit zwei (durch die  $g_i$  repräsentierten) bewegten Systemen  $\Sigma_i$  und dem ruhenden System  $\Sigma_0$ . Nun gilt:

**Satz 2.** *Bewegen wir einen Zweischlag  $B_1 AB_2$  so, dass sein Gelenk  $A$  und die auf den Schenkeln  $g_i = AB_i$  ( $i = 1, 2$ ) liegenden Punkte  $B_i$  die gesamten, durch (5) darstellbaren Randkurven  $k_A$  bzw.  $k_B$  unbeschränkter Bereiche durchlaufen<sup>2)</sup>, dann erzeugen die Punkte  $X_i \in g_i$  ( $\overline{AX}_i = \lambda_i a$ ,  $\overline{X_i B_i} = \lambda_i b$  mit  $a + b, \lambda_i \in \mathbb{R}^+$ ) Bahnen  $k_i$ , welche den Bahnflächeninhalt*

$$F_{12} = [\lambda_1 \lambda_2 (\sin \gamma_2 - \sin \gamma_1) + \delta_2 \lambda_2^2 - \delta_1 \lambda_1^2] ab/2 \quad (6)$$

bestimmen. Hierin bezeichnen wir mit  $\delta_i \in \mathbb{R}$  den Gesamtdrehwinkel von  $g_i$  und mit  $\gamma_1, \gamma_2$  die zu den Fernlagen  $t = \pm \infty$  gehörigen Grenzwerte

$$\gamma_1 := \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t), \quad \gamma_2 := \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t) \quad (7)$$

des Zweischlagwinkels  $\gamma(t) = \angle B_1 A B_2$ <sup>3)</sup>.

Beweis: I. Sei  $Z = \Sigma/\Sigma_0$  ein durch (1) beschriebener, nicht notwendig geschlossener ebener euklidischer  $C^1$ -Zwanglauf,  $X(x, y)$  ein beliebiger Punkt der Gangebene  $\Sigma$  sowie  $O_0$  der Ursprung  $(0, 0)$  der Rastebene  $\Sigma_0$ . Dann überstreichen die Strecken  $\overline{O_0 X}$  ( $t \in I = [r, s]$ ) eine sogenannte «Sektorenfläche», deren orientierter Inhalt  $\tilde{F}(X)$  mittels

$$\tilde{F}(X) = \frac{1}{2} \int_r^s (x_0 \dot{y}_0 - \dot{x}_0 y_0) dt \quad \text{bei} \quad \dot{x}_0 = dx_0/dt, \quad \dot{y}_0 = dy_0/dt$$

berechnet werden kann. Hierbei sind die  $C^1$ -Funktionen  $x_0(t)$  und  $y_0(t)$  der Zwanglaufdarstellung (1) zu entnehmen. Dies liefert mit  $\tilde{F}(O)$  als Sektorenflächeninhalt des Ursprungs  $O(0, 0)$  der Gangebene  $\Sigma$  und geeigneten reellen Konstanten  $C, D$  die in [1, S. 117] angeführte Formel

$$\tilde{F}(X) = \tilde{F}(O) + \frac{\delta}{2} (x^2 + y^2 + Cx + Dy),$$

wobei

$$\tilde{\delta} = \int_r^s \dot{\phi}(t) dt \quad \text{mit} \quad \dot{\phi} = d\phi/dt$$

2) Dies ist nur bei spezieller gegenseitiger Lage der Kurven  $k_A$  und  $k_B$  möglich und setzt jedenfalls das Zusammenfallen ihrer Fernpunkte voraus.

3) Die durch die Bewegung der  $g_i$  definierten Zwangsläufe  $Z_i$  seien auf den gemeinsamen Parameter  $t$  bezogen, und die Durchlaufung erfolge im Sinne wachsender Parameter von der Fernlage  $t = -\infty$  bis zur Fernlage  $t = +\infty$ .  $X^t$  bezeichne die zum Parameterwert  $t$  gehörige Lage des Punktes  $X$  in der Rastebene  $\Sigma_0$ .

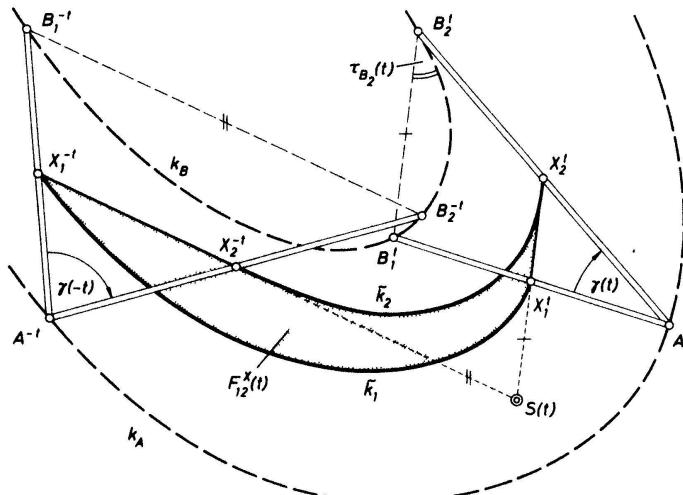
den Gesamtdrehwinkel von  $Z$  bezeichnet. Für die Sektorenflächeninhalte von drei kollinearen Punkten  $A(0,0), B(a+b,0), X(a,0) \in \Sigma$  besteht demnach der Holditch-Satz

$$\tilde{F}(X) = [a\tilde{F}(B) + b\tilde{F}(A)]/(a+b) - ab\tilde{\delta}/2. \quad (8)$$

Wegen der freien Wahl des Rastkoordinatenursprungs  $O_0$  bleibt (8) auch dann gültig, wenn ein anderer Punkt  $S$  der Rastebene als Bezugspunkt für die Sektorenflächen dient. Für einen geschlossenen Zwanglauf  $Z$  (2) ist  $\tilde{\delta} = 2\pi v$ , womit auch die eingangs verwendete Formel (3) bewiesen ist.

II. Nach diesen Vorbereitungen soll nun unser Satz 2 bewiesen werden: Wir schränken die durch die  $g_i$  bestimmten Zwangläufe  $Z_i$  auf das Parameterintervall  $[-t, t]$  ( $t \in \mathbb{R}^+$ ) ein. Die entstehenden i. a. nichtgeschlossenen Zwangläufe  $\tilde{Z}_i(t)$  mögen die Gesamtdrehwinkel  $\tilde{\delta}_i(t)$  besitzen. Aus dem bei geeigneter Parametrisierung der  $Z_i$  – abgesehen von endlich vielen Ausnahmestellen  $t_k$  – existierenden Schnittpunkt  $S(t)$  der Geraden  $X_1'X_2'$  und  $X_1^{-t}X_2^{-t}$  werden die unter  $\tilde{Z}_i$  erzeugten Bahnkurvenstücke durch Sektorenflächen projiziert, für deren orientierte Inhalte nach (8) für  $i = 1, 2$  gilt:

$$\tilde{F}(X_i) = [a\tilde{F}(B_i) + b\tilde{F}(A)]/(a+b) - \lambda_i^2 ab\tilde{\delta}_i(t)/2. \quad (9)$$



Figur 2

Die Bahnkurvenstücke  $\tilde{k}_1$  und  $\tilde{k}_2$  der Punkte  $X_1$  und  $X_2$  werden nun durch die Strecken  $X_1'X_2'$  und  $X_2^{-t}X_1^{-t}$  zu einer geschlossenen Kurve ergänzt, die bei Durchlaufung in der Reihenfolge  $X_1'X_2'X_2^{-t}X_1^{-t}X_1'$  den orientierten Inhalt

$$F_{12}^X = \tilde{F}(X_1) - \tilde{F}(X_2)$$

besitzt (Fig. 2); analog definieren wir den Inhalt  $F_{12}^B(t)$ . Bezeichnen wir weiters mit  $\Delta_i$  die orientierten Dreiecksflächeninhalte

$$\Delta_1(t) := F(\Delta SB_1'B_2'), \quad \Delta_2(t) := F(\Delta SB_1^{-t}B_2^{-t}),$$

so folgern wir über

$$F_{12}^B(t) = \tilde{F}(B_1) - \tilde{F}(B_2) + \Delta_1(t) - \Delta_2(t)$$

aus (9) die Beziehung

$$F_{12}^X(t) = \frac{a}{a+b} [F_{12}^B(t) + \Delta_2(t) - \Delta_1(t)] + [\tilde{\delta}_2(t) \lambda_2^2 - \tilde{\delta}_1(t) \lambda_1^2] ab/2. \quad (10)$$

Für die Differenz der Dreiecksflächen  $\Delta$ , finden wir

$$\frac{a}{a+b} [\Delta_2(t) - \Delta_1(t)] = \lambda_1 \lambda_2 ab [\sin \gamma(-t) - \sin \gamma(t)]/2. \quad (11)$$

Mit  $\tau_{B_i}(t) \in [0, \pi]$  als Winkel zwischen  $k_B$  und der Strecke  $B_1'B_2'$  in  $B_i'$  haben wir für  $F_{12}^B(t)$  folgende Abschätzung:

$$|F_{12}^B(t)| \leq (\lambda_1 + \lambda_2)^2 (a+b)^2 [\sin \tau_{B_1}(t) + \sin \tau_{B_2}(t) + \sin \tau_{B_1}(-t) + \sin \tau_{B_2}(-t)] \\ \forall t > t_0 \in \mathbf{R}^+.$$

Also strebt  $F_{12}^B(t)$  für  $t \rightarrow +\infty$  wegen

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \tau_{B_i}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \tau_{B_i}(-t) = 0$$

gegen Null. Damit geht schliesslich (10) beim Grenzübergang  $t \rightarrow +\infty$  unter Beachtung von (7), (11) und

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F_{12}^X(t) =: F_{12}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{\delta}_i(t) = \delta_i$$

in die Behauptung (6) über.  $\square$

Unsere Beweisführung zeigt, dass  $F_{12} (= -F_{21})$  parameterinvariant ist, jedoch von der durch die  $Z_i$  vermittelten Orientierung der Kurven  $k_A, k_B$  abhängt: Lässt man nämlich entgegen unserer bisherigen Annahme die Bewegung von der (ursprünglichen) Fernlage  $+\infty$  nach  $-\infty$  ablaufen, so vertauschen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  ihre Bedeutung und die Gesamtdrehwinkel  $\delta_i$  wechseln ihr Vorzeichen. Dies hat – wie es nach unserer Definition sein muss – gemäss (6) einen Vorzeichenwechsel von  $F_{12}$  zur Folge. Weiters erkennen wir, dass sämtliche der in  $F_{12}$  aufsummierten Inhalte existieren (z. B.  $F_1$  und  $F_2$  in Fig. 1) und nicht etwa ein Grenzwert vom Typ « $\infty - \infty$ » vorliegt.

Selbstverständlich stehen die Winkel  $\gamma_i$  und  $\delta_i$  durch die Abhängigkeit

$$\gamma_1 + \delta_1 - \delta_2 \equiv \gamma_2 \pmod{2\pi}$$

in Beziehung.

In Satz 2 liegt mit  $k_A = k_B$  und  $\lambda_1 = 0$  die in [5] studierte Erweiterung des Holditch-Satzes für Führungskurven, die einen unbeschränkten konvexen Bereich der Rastebene beran-

den. In diesem Fall erweist sich  $k_2$  als einfache Kurve und  $\delta_2$  fällt mit dem Tangentendrehwinkel von  $k_4$  zusammen.

Helmut Pottmann, TU Wien

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 W. Blaschke und H. R. Müller: Ebene Kinematik. Oldenbourg, München 1956.
- 2 L. Hering: Sätze vom Holditch-Typ für ebene Kurven. El. Math. 38, 39–49 (1983).
- 3 H. Holditch: Geometrical Theorem. Q. J. Pure Appl. Math. 2 (1858).
- 4 H. R. Müller: Kinematik. Sammlg. Göschen (Bd. 584/584a), Berlin 1963.
- 5 H. Pottmann: Holditch-Sicheln. Arch. Math. 44, 373–378 (1985).
- 6 H. Pottmann: Ein isotropes Analogon zum Satz von Holditch. J. of Geometry (im Druck).
- 7 W. Wunderlich: Ebene Kinematik. Bibl. Inst. HTB (Bd. 447/447a), Mannheim/Wien/Zürich 1970.

© 1986 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/86/060001-06\$1.50 + 0.20/0

## The Farey series of polynomials over a finite field

### Introduction

The ordinary Farey series of order  $n$ ,  $F_n = \{h/k \mid 0 \leq h \leq k \leq n, (h, k) = 1\}$  has a number of interesting intrinsic properties as well as having applications to such diverse areas as approximating irrational numbers, solving the Diophantine equation

$$a/b = 1/x_1 + \cdots + 1/x_k$$

(Egyptian fraction problem), and the Hardy-Littlewood method of analytic number theory.

If  $p$  is a prime, let  $GF(p')$  be the finite field with  $p'$  elements, and  $GF[p', x]$  the ring of polynomials over this field. The Farey series  $\mathfrak{F}_n$  is defined as:

$$\mathfrak{F}_n = \{P/Q \mid P, Q \in GF[p', x], \deg P < \deg Q \leq n, (P, Q) = 1, Q \text{ monic}\}.$$

We let  $GF(p', x)$  denote the field of rational functions over  $GF(p')$ ;  $v(P/Q) = \deg Q - \deg P$  the usual degree valuation on  $GF(p', x)$ ;  $GF\{p', x\}$  the completion of  $GF(p', x)$  with respect to  $v$ , so

$$GF\{p', x\} = \left\{ \alpha = \sum_{j=t}^{\infty} a_j x^{-j} \mid a_j \in GF(p') \right\}$$

where  $v(\alpha) = t$  and  $|\alpha| = (p')^{-v(\alpha)} = p^{-n'}$ . (The degree of the zero polynomial is taken to be  $-\infty$ .) Also, the distance between  $\alpha$  and  $\beta$  is given by  $|\alpha - \beta|$ , which is easily seen to be an ultrametric on  $GF\{p', x\}$ . The set  $\mathfrak{I} = \{\alpha \mid v(\alpha) > 0\}$  consists of all elements of the form