Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 40 (1985)
Heft: 6

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Kleine Mitteilungen

Logarithmische Konvexität und Ungleichungsscharen

Eine differenzierbare Funktion $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ heisst logarithmisch konvex, wenn $\log(f)$ konvex ist, d. h. wenn f'/f isoton ist. Ist somit f logarithmisch konvex und s eine feste positive Zahl, so darf man schreiben

$$0 > \frac{f(t-s)}{f(t)}\left[\frac{f'(t-s)}{f(t-s)} - \frac{f'(t)}{f(t)}\right] = \frac{d}{dt}\frac{f(t-s)}{f(t)}.$$

Es folgt also, dass $g: t \mapsto f(t-s)/f(t)$ antiton ist. Wir werden an einem Beispiel zeigen, wie dieses elementare Ergebnis zu interessanten Ungleichungsscharen führen kann.
Wir betrachten die Funktion

$$F(t;x) := \begin{cases} \dfrac{x^t - 1}{t}, & t \neq 0, \\ \log x, & t = 0 \end{cases}$$

wobei $x > 0$ eine feste Zahl ist. Da $t \mapsto x^t$ konvex ist, ist es leicht, die Isotonie von F bez. t nachzuweisen. Ferner ist F offenbar positiv, falls $x > 1$ ist.

Lemma: *Sei $x > 1$ fest. Dann ist die Funktion $F: t \mapsto F(t;x)$ logarithmisch konvex.*

Beweis: Es gilt für $t \neq 0$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\log F(t;x)) = \frac{x^t}{t^2}\left[\frac{1}{x^t} - \left(\frac{\log x^t}{x^t - 1}\right)^2\right],$$

und dies ist > 0 wegen der Ungleichung von Karamata (vgl. [1], 3.6.15)

$$\frac{\log \xi}{\xi - 1} < \frac{1}{\sqrt{\xi}}, \quad \xi \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}.$$

Nach diesen Vorbereitungen ist es ein Spiel, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz: *Die Funktion*

$$G(t;s,x) := \frac{F(t-s;x)}{F(t;x)} = \begin{cases} \dfrac{t}{t-s} \cdot \dfrac{x^{t-s} - 1}{x^t - 1}, & t \neq 0, s \\ \dfrac{1}{s} \cdot \dfrac{1 - x^{-s}}{\log s}, & t = 0 \\ s \cdot \dfrac{\log x}{x^s - 1}, & t = s \end{cases}$$

ist antiton bez. t für alle festgewählte $x \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}, s > 0$.

Beweis: Der Fall $x > 1$ ist von den allgemeinen Betrachtungen am Anfang erledigt. Sei $0 < x < 1$. Wegen $F(t;x) = -F(-t;1/x)$ gilt

$$G(t;s,x) = \frac{F(-t+s;1/x)}{F(-t;1/x)},$$

und G ist antiton nach dem ersten Fall.
Jetzt ziehen wir aus diesem Satz ein Paar hübscher Folgerungen:

Korollar 1: *Es gilt für* $0 < u < s < v, x \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$

$$\frac{v}{v-s} \cdot \frac{x^{v-s}-1}{x^v-1} < s \cdot \frac{\log x}{x^s-1} < \frac{u}{s-u} \cdot \frac{1-x^{u-s}}{x^u-1} < \frac{1}{sx^s} \cdot \frac{x^s-1}{\log x}.$$

Beweis: $G(v;s,x) < G(s;s,x) < G(u;s,x) < G(0;s,x)$.

Bemerkungen: 1. Die ersten zwei Ungleichungen von Korollar 1 sind im Fall $x > 1, s = 1$, in [2] formuliert worden.
2. In der «$G(.;.,.)$-Sprache» lautet die Ungleichung von Karamata (s. den Beweis des Lemmas) einfach $G(1;1,x) < G(\frac{1}{2};1,x)$. Jede $G(1;1,x) < G(t;1,x)$, $\frac{1}{2} < t < 1$ liefert somit eine Verschärfung dieser Ungleichung.

Korollar 2: *Für* $n > 1, x \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$ *gilt*

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(x^n-1\right)^2 < \left(x^{n-1}-1\right)\left(x^{n+1}-1\right) < \left(x^n-1\right)^2.$$

Beweis: Die erste Ungleichung folgt aus $G(n;1,x) > G(n+1;1,x)$. Die zweite reduziert sich auf $(x-1)^2 > 0$.

V. Mascioni, Mathematik-Departement, ETH Zürich

LITERATURVERZEICHNIS

1 D.S. Mitrinović: Analytic Inequalities. Berlin 1970.
2 L. Bass, R. Výborný und V. Thomée: Proposal 1212. Math. Mag. *58*, 111 (1985).

© 1985 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/85/060149-02$1.50 + 0.20/0