Kleine Mitteilungen

Logarithmische Konvexität und Ungleichungsscharen

Eine differenzierbare Funktion $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ heisst logarithmisch konvex, wenn $\log(f)$ konvex ist, d. h. wenn f'/f isoton ist. Ist somit f logarithmisch konvex und s eine feste positive Zahl, so darf man schreiben

$$0 > \frac{f(t-s)}{f(t)}\left[\frac{f'(t-s)}{f(t-s)} - \frac{f'(t)}{f(t)}\right] = \frac{d}{dt}\,\frac{f(t-s)}{f(t)}.$$

Es folgt also, dass $g: t \mapsto f(t-s)/f(t)$ antiton ist. Wir werden an einem Beispiel zeigen, wie dieses elementare Ergebnis zu interessanten Ungleichungsscharen führen kann.
Wir betrachten die Funktion

$$F(t;x) := \begin{cases} \dfrac{x^t - 1}{t}, & t \neq 0, \\ \log x, & t = 0 \end{cases}$$

wobei $x > 0$ eine feste Zahl ist. Da $t \mapsto x^t$ konvex ist, ist es leicht, die Isotonie von F bez. t nachzuweisen. Ferner ist F offenbar positiv, falls $x > 1$ ist.

Lemma: *Sei $x > 1$ fest. Dann ist die Funktion $F: t \mapsto F(t;x)$ logarithmisch konvex.*

Beweis: Es gilt für $t \neq 0$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\log F(t;x)) = \frac{x^t}{t^2}\left[\frac{1}{x^t} - \left(\frac{\log x^t}{x^t - 1}\right)^2\right],$$

und dies ist > 0 wegen der Ungleichung von Karamata (vgl. [1], 3.6.15)

$$\frac{\log \xi}{\xi - 1} < \frac{1}{\sqrt{\xi}}, \quad \xi \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}.$$

Nach diesen Vorbereitungen ist es ein Spiel, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz: *Die Funktion*

$$G(t;s,x) := \frac{F(t-s;x)}{F(t;x)} = \begin{cases} \dfrac{t}{t-s}\cdot\dfrac{x^{t-s} - 1}{x^t - 1}, & t \neq 0, s \\ \dfrac{1}{s}\cdot\dfrac{1 - x^{-s}}{\log s}, & t = 0 \\ s \cdot \dfrac{\log x}{x^s - 1}, & t = s \end{cases}$$

ist antiton bez. t für alle festgewählte $x \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}, s > 0$.

Beweis: Der Fall $x > 1$ ist von den allgemeinen Betrachtungen am Anfang erledigt. Sei $0 < x < 1$. Wegen $F(t;x) = -F(-t;1/x)$ gilt

$$G(t;s,x) = \frac{F(-t+s;1/x)}{F(-t;1/x)},$$

und G ist antiton nach dem ersten Fall.
Jetzt ziehen wir aus diesem Satz ein Paar hübscher Folgerungen:

Korollar 1: *Es gilt für* $0 < u < s < v, x \in \mathbf{R}_+ \backslash \{1\}$

$$\frac{v}{v-s} \cdot \frac{x^{v-s}-1}{x^v-1} < s \cdot \frac{\log x}{x^s-1} < \frac{u}{s-u} \cdot \frac{1-x^{u-s}}{x^u-1} < \frac{1}{sx^s} \cdot \frac{x^s-1}{\log x}.$$

Beweis: $G(v;s,x) < G(s;s,x) < G(u;s,x) < G(0;s,x)$.

Bemerkungen: 1. Die ersten zwei Ungleichungen von Korollar 1 sind im Fall $x > 1, s = 1$, in [2] formuliert worden.
2. In der «$G(.;.,.)$-Sprache» lautet die Ungleichung von Karamata (s. den Beweis des Lemmas) einfach $G(1;1,x) < G(½;1,x)$. Jede $G(1;1,x) < G(t;1,x)$, $½ < t < 1$ liefert somit eine Verschärfung dieser Ungleichung.

Korollar 2: *Für* $n > 1, x \in \mathbf{R}_+ \backslash \{1\}$ *gilt*

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(x^n-1\right)^2 < \left(x^{n-1}-1\right)\left(x^{n+1}-1\right) < \left(x^n-1\right)^2.$$

Beweis: Die erste Ungleichung folgt aus $G(n;1,x) > G(n+1;1,x)$. Die zweite reduziert sich auf $(x-1)^2 > 0$.

V. Mascioni, Mathematik-Departement, ETH Zürich

LITERATURVERZEICHNIS

1 D. S. Mitrinović: Analytic Inequalities. Berlin 1970.
2 L. Bass, R. Výborný und V. Thomée: Proposal 1212. Math. Mag. *58*, 111 (1985).

 0013-6018/85/060149-02$1.50 + 0.20/0