Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 40 (1985)

Heft: 6

Artikel: Typisierung der elliptischen Dreiecke nach der Qualität ihrer Winkel und Seiten

Autor: Kaiser, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-38839

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Den Hinweis auf die unären Algebren als entscheidende Hintergrundstruktur beim Kaprekar-Problem verdanke ich W. Deuber in Bielefeld.

M. Jeger
Mathematik-Departement ETH Zürich

LITERATURVERZEICHNIS

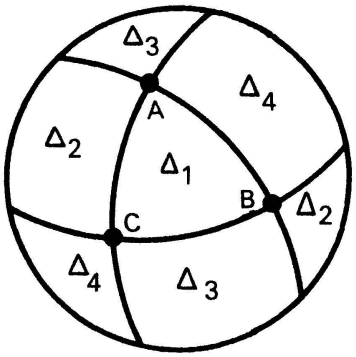
1 H. Hasse and G. D. Prichett: The determination of all four-digit Kaprekar-Constants. J. reine angew. Math. *299/300*, 113–124 (1978).
2 E. Hlawka, Ch. Binder und P. Schmitt: Grundbegriffe der Mathematik. Reihe Universitäts-Lehr und -Studienbücher. Wien 1979.
3 D. R. Kaprekar: Another solitaire game. Scripta math. *15*, 244–245 (1949).
4 J. C. Lagarias: The $(3x + 1)$-Problem and its generalizations. Am. math. Mon. *82*, 3–23 (1985).
5 J. F. Lapenta, A. L. Ludington and G. D. Prichett: An algorithm to determine self-producting r-digit g-adic integers. J. reine angew. Math. *310*, 100–110 (1979).
6 F. Padberg: Zum Einsatz eines Taschenrechners bei der Entdeckung einfacher Sätze. Ein zahlentheoretisches Beispiel. Didaktik Math. (DdM) *1980*/3, 183–188.

© 1985 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/85/060129-15$1.50 + 0.20/0

Typisierung der elliptischen Dreiecke nach der Qualität ihrer Winkel und Seiten

In der Theorie der Polyeder in n-dimensionalen Räumen konstanter Krümmung gibt es eine Reihe von Problemen, bei denen nicht die genaue Grösse der Polyederinnenwinkel von Interesse ist, sondern nur deren *Qualität*, d. h. die Eigenschaft, ein spitzer, ein rechter oder ein stumpfer Winkel zu sein. Zu diesen Problemen gehört beispielsweise die von H. Hadwiger gestellte Frage nach der Orthoschemzerlegbarkeit von Polyedern (vgl. [5]).
Eine ausführliche Darstellung der qualitativen Winkeleigenschaften euklidischer Simplexe findet sich bei M. Fiedler [3, 4].
Im vorliegenden Aufsatz werden die Möglichkeiten für die Existenz und die gegenseitige Lage spitzer, rechter und stumpfer Elemente (d. h. Winkel und Seiten) bei elliptischen Dreiecken untersucht.
Es sei $\mathfrak{E}$ der zweidimensionale Raum mit der konstanten Krümmung $\varkappa = 1$ (elliptische Ebene). Im folgenden wird es oft nützlich sein, an die Einheitshalbsphäre mit identifizierten diametralen Randpunkten als ein Modell von $\mathfrak{E}$ zu denken.
Ein Dreieck in $\mathfrak{E}$ (elliptisches Dreieck) ist im Unterschied zur euklidischen und hyperbolischen Geometrie durch seine drei Eckpunkte nicht eindeutig festgelegt. Sind A, B und C drei Punkte aus $\mathfrak{E}$ in allgemeiner Lage, dann zerlegen die Geraden $g(A, B)$, $g(A, C)$ und $g(B, C)$ die Ebene $\mathfrak{E}$ elementar-geometrisch in vier Dreiecke $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ und Δ_4, die alle die Eckpunkte A, B und C besitzen (vgl. Figur 1 sowie [2], S. 62; die Darstellung von $\mathfrak{E}$ in Figur 1 ist aufzufassen als senkrechte Parallelprojektion des Halbsphärenmodells auf

dessen euklidische «Äquatorebene»). Drei Strecken, die paarweise die Punkte A, B und C verbinden, sind genau dann die Seiten eines Dreiecks, wenn es einen Kreis in $\mathfrak{E}$ gibt, in dessen Innern alle drei Strecken liegen (vgl. [1]).
Die Geraden in $\mathfrak{E}$ haben die Länge π. Dreiecksseiten werden als spitze, rechte oder stumpfe Seiten bezeichnet, je nachdem, ob ihre Länge kleiner, gleich oder grösser $\pi/2$ ist.



Figur 1

Definition 1. Es sei φ diejenige Funktion, die jedem Eckpunkt P jedes Dreiecks Δ ein geordnetes Zahlenpaar (w, s) zuordnet mit

$$w = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases} \Leftrightarrow \text{Der Innenwinkel von } \Delta \text{ bei } P \text{ ist ein} \begin{cases} \text{spitzer} \\ \text{rechter} \\ \text{stumpfer} \end{cases} \text{Winkel.}$$

$$s = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases} \Leftrightarrow \text{Die gegenüberliegende Seite von } P \text{ ist eine} \begin{cases} \text{spitze} \\ \text{rechte} \\ \text{stumpfe} \end{cases} \text{Seite.}$$

Zwei Dreiecke Δ_1 und Δ_2 heissen genau dann *qualitativ gleich,* wenn sich ihre Eckpunkte so mit A_1, B_1 und C_1 bzw. A_2, B_2 und C_2 bezeichnen lassen, dass für $i = A, B, C$ die Identität $\varphi(i_1) = \varphi(i_2)$ gilt.

Es ist klar, dass es sich bei der qualitativen Gleichheit um eine Äquivalenzrelation handelt. Die Äquivalenzklassen sollen als *Qualitätstypen* elliptischer Dreiecke bezeichnet werden.
$\mathfrak{Q}$ sei ein Qualitätstyp und Δ ein Dreieck aus $\mathfrak{Q}$ mit den Eckpunkten A, B und C. Dann wird $\mathfrak{Q}$ die 3-Auswahl (Kombination der Ordnung 3 mit Wiederholungen) $[\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C)]$ aus der Menge der neun geordneten Paare (w, s) mit $w, s \in \{1, 0, -1\}$ zugeordnet. Da diese Zuordnung offenbar repräsentantenunabhängig und eineindeutig ist, ist es möglich, jeden Qualitätstyp im weiteren durch seine zugeordnete 3-Auswahl zu symbolisieren. Die Anzahl dieser 3-Auswahlen ist $\binom{9+3-1}{3} = \binom{11}{3} = 165$, so dass es höchstens 165 Qualitätstypen elliptischer Dreiecke gibt.
Die vier Dreiecke, in die $\mathfrak{E}$ durch drei verschiedene Geraden zerlegt wird, werden *Nebendreiecke* genannt (vgl. Figur 1 sowie [2], S. 118). Einander entsprechende Seiten zweier

Nebendreiecke (gemeinsame Trägergerade) ergänzen sich entweder zu einer vollständigen Geraden, oder sie sind identisch. Einander entsprechende Winkel (gemeinsamer Scheitelpunkt) sind entweder Scheitel- oder Nebenwinkel. Folglich ergänzen sich die Grössen einander entsprechender Dreieckselemente entweder zu π, oder sie stimmen überein.

Hilfssatz 1. *Existiert ein Qualitätstyp* $\mathfrak{Q} = [(w_1, s_1), (w_2, s_2), (w_3, s_3)]$, *so existieren auch die Typen* $\mathfrak{Q}' = [(w_1, s_1), (-w_2, -s_2), (-w_3, -s_3)]$, $\mathfrak{Q}'' = [(-w_1, -s_1), (w_2, s_2), (-w_3, -s_3)]$ *und* $\mathfrak{Q}''' = [(-w_1, -s_1), (-w_2, -s_2), (w_3, s_3)]$.

Beweis: Das Dreieck Δ sei ein Repräsentant von $\mathfrak{Q}$. Aus den oben dargelegten Beziehungen zwischen den Grössen einander entsprechender Elemente von Nebendreiecken folgt, dass die drei nicht mit Δ identischen Nebendreiecke von Δ Repräsentanten der Qualitätstypen $\mathfrak{Q}'$, $\mathfrak{Q}''$ und $\mathfrak{Q}'''$ sind. □

Definition 2. Jeweils zwei von vier Qualitätstypen, die sich wie die Typen $\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}', \mathfrak{Q}''$ und $\mathfrak{Q}'''$ aus Hilfssatz 1 darstellen lassen, werden als *Nebentypen* bezeichnet. Die 4-Auswahl $[\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}', \mathfrak{Q}'', \mathfrak{Q}''']$ von Qualitätstypen wird *Nebentypenauswahl* genannt.

Bekanntlich gibt es in $\mathfrak{E}$ zu jedem Punkt P genau eine Gerade g (Polare) und zu jeder Geraden g einen Punkt P (Pol), so dass jeder Punkt von g zu P den Abstand $\pi/2$ hat und jede Gerade durch P senkrecht zu g ist. Dieser grundlegende Zusammenhang wird auch als die *Pol-Polare-Beziehung* der elliptischen Ebene bezeichnet.
Die aus der projektiven und sphärischen Geometrie bekannte Konstruktion des sogenannten *Polardreiecks* lässt sich auch in $\mathfrak{E}$ ausführen (vgl. [6]). Δ sei ein elliptisches Dreieck mit den Eckpunkten A, B und C. Die Eckpunkte des Polardreiecks Δ' von Δ sind dann die Pole A', B' bzw. C' der Geraden $g(B, C)$, $g(A, C)$ bzw. $g(A, B)$. Die Seiten $A'B'$, $B'C'$ und $A'C'$ von Δ' lassen sich so wählen, dass die Gleichungen $|A'B'| = \pi - |\sphericalangle ACB|$, $|B'C'| = \pi - |\sphericalangle CAB|$ und $|A'C'| = \pi - |\sphericalangle CBA|$ gelten. Der Beweis erfolgt wie im sphärischen Fall. Die Seitenlängen von Δ' sind also die Supplemente der entsprechenden Winkelgrössen von Δ. Da die Zuordnung von Δ und Δ' offenbar eine involutorische Abbildung ist, sind andererseits die Winkelgrössen von Δ' die Supplemente der entsprechenden Seitenlängen von Δ.

Hilfssatz 2. *Existiert ein Qualitätstyp* $\mathfrak{Q} = [(w_1, s_1), (w_2, s_2), (w_3, s_3)]$, *so existiert auch der Typ* $\mathfrak{Q}' = [(-s_1, -w_1), (-s_2, -w_2), (-s_3, -w_3)]$.

Beweis: Das Dreieck Δ sei ein Repräsentant von $\mathfrak{Q}$. Dann ist das Polardreieck Δ' von Δ wegen der obigen Bemerkungen ein Repräsentant von $\mathfrak{Q}'$. □

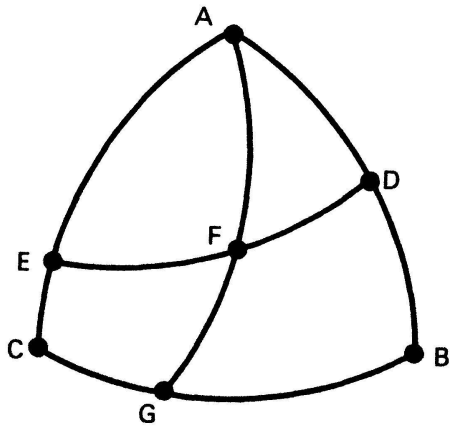
Definition 3. Zwei Qualitätstypen, die sich wie die Typen $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}'$ aus Hilfssatz 2 darstellen lassen, werden als *Polartypen* bezeichnet. Die 2-Auswahl $[\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}']$ von Qualitätstypen wird *Polartypauswahl* genannt.

Satz. *Es existieren genau die folgenden sechzehn Qualitätstypen elliptischer Dreiecke:*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Q}_1 &= [(1,1),(1,1),(1,1)], & \mathfrak{Q}_2 &= [(1,1),(1,1),(0,1)],\\
\mathfrak{Q}_3 &= [(1,1),(1,1),(-1,1)], & \mathfrak{Q}_4 &= [(1,1),(1,1),(-1,0)],\\
\mathfrak{Q}_5 &= [(1,1),(1,0),(-1,-1)], & \mathfrak{Q}_6 &= [(1,1),(1,-1),(-1,-1)],\\
\mathfrak{Q}_7 &= [(1,1),(1,1),(-1,-1)], & \mathfrak{Q}_8 &= [(1,1),(0,0),(0,0)],\\
\mathfrak{Q}_9 &= [(1,1),(-1,-1),(-1,-1)], & \mathfrak{Q}_{10} &= [(1,1),(0,-1),(-1,-1)],\\
\mathfrak{Q}_{11} &= [(0,0),(0,0),(-1,-1)], & \mathfrak{Q}_{12} &= [(0,1),(-1,-1),(-1,-1)],\\
\mathfrak{Q}_{13} &= [(0,0),(0,0),(0,0)], & \mathfrak{Q}_{14} &= [(-1,-1),(-1,-1),(-1,-1)],\\
\mathfrak{Q}_{15} &= [(-1,0),(-1,-1),(-1,-1)], & \mathfrak{Q}_{16} &= [(-1,1),(-1,-1),(-1,-1)].
\end{aligned}$$

Beweis: 1. Existenz. Zunächst wird die Existenz von fünf Typen durch Konstruktion nachgewiesen.

Es seien A ein beliebiger Punkt aus $\mathfrak{E}$, B ein Punkt auf der Polaren von A, h die Senkrechte zu $g(A,B)$ durch A, C der Schnittpunkt von h und der Polaren von A und k ein Kreis, in dessen Innern die Punkte A, B und C liegen. Die Strecken und die Dreiecke, die im folgenden im Zusammenhang mit dieser Konstruktion angeführt werden, sollen stets diejenigen sein, die im Innern des Kreises k liegen. D bzw. E seien innere Punkte von AB bzw. AC. Da $g(E,D)$ nicht die Polare von A ist, existiert ein Punkt F im Innern von DE, für den o.B.d.A. $|\sphericalangle AFD| < \frac{\pi}{2}$ gilt. Der Punkt G sei der Durchschnitt von $g(A,F)$ und BC (vgl. Figur 2).



Figur 2

Wird berücksichtigt, dass A, B bzw. C die Pole von $g(B,C)$, $g(A,C)$ bzw. $g(A,B)$ sind, so lässt sich die eindeutig bestimmte Qualität aller Elemente der Dreiecke ABC, ADF, ABG, ADE und AEF unmittelbar aus der Konstruktion entnehmen. Es ergibt sich $ABC \in \mathfrak{Q}_{13}$, $ADF \in \mathfrak{Q}_1$, $ADE \in \mathfrak{Q}_2$, $ABG \in \mathfrak{Q}_8$, $AEF \in \mathfrak{Q}_3$.

In der Figur 3 sind sämtliche Neben- und Polartypbeziehungen, die zwischen den sechzehn Typen bestehen, in einem Graphen dargestellt. Die Knoten symbolisieren die Qualitätstypen. Eine durchgezogene bzw. gestrichelte Kante zwischen zwei Knoten bedeutet, dass die entsprechenden Typen Neben- bzw. Polartypen sind. Ist ein Typ zu sich selbst Neben- oder Polartyp, so wird das durch eine Schleife symbolisiert. Für jede der fünf Komponenten des Graphen wurde die Existenz eines zugehörigen Typs (unterstrichen) durch Konstruktion nachgewiesen. Folglich ergibt sich die Existenz der übrigen elf Typen aus den Hilfssätzen 1 und 2.

2. Vollständigkeit. Die Vollständigkeit der Typisierung wird unter Verwendung von trigonometrischen Sätzen der sphärischen Geometrie bewiesen, die auch in der elliptischen Geometrie gelten (vgl. [6]).

Δ sei ein elliptisches Dreieck mit den Winkeln α, β und γ und den Seiten a, b und c. Bis auf Permutation der Bezeichnungen α, β und γ gibt es zehn verschiedene Möglichkeiten, die Qualität der drei Winkel von Δ auszuwählen.

1. Fall. In Δ seien zwei Winkel spitz und einer stumpf. O.B.d.A. gelte $|\alpha| < \pi/2, |\gamma| < \pi/2$ und $|\beta| > \pi/2$.

1.1. Die Seiten a und c seien spitz. Je nachdem, welche der drei möglichen Qualitäten die Seite c besitzt, gehört Δ dann zu $\mathfrak{Q}_3$, zu $\mathfrak{Q}_4$ oder zu $\mathfrak{Q}_7$.

1.2. Eine anliegende Seite von β sei nicht spitz. O.B.d.A. gelte $|c| \geq \pi/2$. Aus den Kotangenssätzen

$$\sin c \cot b = \cos c \cos \alpha + \sin \alpha \cot \beta$$

bzw.

$$\sin c \cot a = \cos c \cos \beta + \sin \beta \cot \alpha$$

folgt $\cot b < 0$ bzw. $\cot a > 0$, so dass b stumpf und a spitz ist. Je nachdem, ob c eine rechte oder eine stumpfe Seite ist, gehört Δ zu $\mathfrak{Q}_5$ oder zu $\mathfrak{Q}_6$.

2. Fall. In Δ seien alle drei Winkel stumpf.

2.1. Alle drei Seiten von Δ seien stumpf. Dann gilt $\Delta \in \mathfrak{Q}_{14}$.

2.2. O.B.d.A. sei c nicht stumpf. Aus den beiden oben erwähnten Kontangenssätzen folgt dann, dass a und b stumpf sind. Je nachdem, ob c eine rechte oder eine spitze Seite ist, gehört Δ zu $\mathfrak{Q}_{15}$ oder zu $\mathfrak{Q}_{16}$.

3. Fall. Die Qualität der Winkel von Δ möge einer der übrigen acht 3-Auswahlen aus $\{1, 0, -1\}$ entsprechen. Dann ist die Qualität aller Dreiecksseiten stets eindeutig mit Hilfe des Winkelkosinussatzes $\cos a = \dfrac{\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma}{\sin \gamma \sin \beta}$ (und entsprechender Formen für $\cos b$ und $\cos c$) bestimmbar. Δ gehört dann zu einem der Typen $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_8, \mathfrak{Q}_9, \mathfrak{Q}_{10}, \mathfrak{Q}_{11}, \mathfrak{Q}_{12}$ und $\mathfrak{Q}_{13}$. Es existiert demnach kein weiterer Qualitätstyp. □

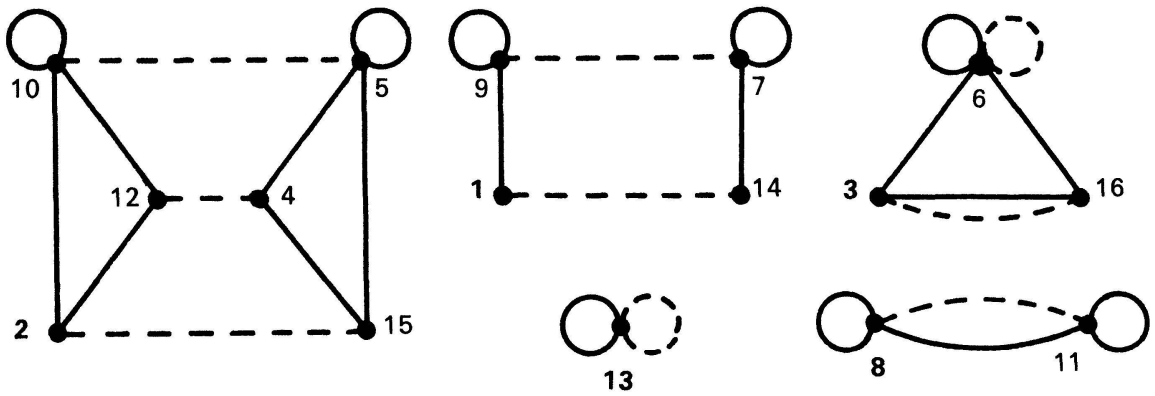
Abschliessend noch einige Folgerungen bzw. Bemerkungen.

1. Aus dem Vollständigkeitsbeweis geht hervor, dass jede 3-Auswahl von Winkelqualitäten durch mindestens einen Qualitätstyp realisiert wird. Die entsprechende Aussage für die Seitenqualitäten ergibt sich über die Polartypbeziehung.

2. Es gibt genau neun Polartypauswahlen (vgl. Figur 3). Nur die Typen $\mathfrak{Q}_6$und $\mathfrak{Q}_{13}$ sind jeweils zu sich selbst polar. Für die Dreiecke dieser Typen ist die Situation jedoch unterschiedlich. Während Dreieck und Polardreieck aus $\mathfrak{Q}_{13}$ identisch sind, brauchen Dreieck und Polardreieck aus $\mathfrak{Q}_6$ trotz ihrer qualitativen Gleichheit nicht einmal kongruent zu sein.

3. Unter den sieben Nebentypauswahlen (vgl. Figur 3) gibt es keine, deren Typen paarweise voneinander verschieden sind. Von vier Nebendreiecken sind demnach stets mindestens zwei qualitativ gleich.

4. Jeder der Typen $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_3, \mathfrak{Q}_4, \mathfrak{Q}_{12}, \mathfrak{Q}_{14}, \mathfrak{Q}_{15}$ und $\mathfrak{Q}_{16}$ kommt in seiner Nebentypauswahl nur einmal vor. Folglich sind die Dreiecke dieser Typen durch Angabe der Eckpunkte und des Typs eindeutig bestimmt. Da die Nebendreiecke jedes Dreiecks aus $\mathfrak{Q}_{13}$ nicht nur



Figur 3

qualitativ gleich, sondern auch kongruent sind, ist jedes Dreieck diesen Typs durch die Angabe der Eckpunkte und des Typs bis auf die Lage in $\mathfrak{E}$ eindeutig bestimmt.

5. Jedes der neun geordneten Paare (w,s) mit $w,s \in \{1,0,-1\}$ kommt mindestens bei einem Qualitätstyp vor. Genau die drei Paare $(1,0), (1,-1)$ und $(0,-1)$ kommen jeweils nur einmal vor. Jeder der zugehörigen Typen $\mathfrak{Q}_5, \mathfrak{Q}_6$ und $\mathfrak{Q}_{10}$ ist demnach schon durch ein Paar (w,s) festgelegt: Liegt in einem elliptischen Dreieck Δ eine rechte bzw. stumpfe Seite einem spitzen Winkel gegenüber, so gilt $\Delta \in \mathfrak{Q}_5$ bzw. $\Delta \in \mathfrak{Q}_6$; liegt in Δ eine stumpfe Seite einem rechten Winkel gegenüber, so gilt $\Delta \in \mathfrak{Q}_{10}$.

6. Elliptische Dreiecke treten bei Tetraedern in Räumen konstanter Krümmung als sogenannte *Auffangdreiecke* auf (vgl. [2], S. 64). Einander entsprechende Winkel an einer Tetraederecke und im zugehörigen Auffangdreieck haben dieselbe Grösse und damit erst recht dieselbe Qualität. Folglich überträgt sich die Typisierung der elliptischen Dreiecke auf die Flächen- und Raumwinkel an Tetraederecken. Diese Aussage lässt sich verallgemeinern für die Winkel an Dreikantecken von Polyedern in Räumen konstanter Krümmung.

H. Kaiser, Friedrich-Schiller-Universität Jena

LITERATURVERZEICHNIS

1 J. Böhm: Über die Struktur von Simplexen in r-dimensionalen Räumen konstanter Krümmung unter besonderer Berücksichtigung des elliptischen Falles. Beitr. Algebra Geom. *6*, 105–129 (1977).
2 J. Böhm und E. Hertel: Polyedergeometrie in n-dimensionalen Räumen konstanter Krümmung. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1980, und Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Stuttgart 1981.
3 M. Fiedler: Geometrie simplexu v E_n (I.), Časopis pro pěst. mat. *79*, 297–320 (1954).
4 M. Fiedler: Über qualitative Winkeleigenschaften der Simplexe. Čech. mat. žurnal *7*, 463–478 (1957).
5 H. Hadwiger: Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1957.
6 C. M. Y. Sommerville: The elements of non-Euclidean geometry. Dover publications, New York 1958.

© 1985 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/85/060143-06$1.50 + 0.20/0