

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 40 (1985)  
**Heft:** 5  
  
**Rubrik:** Aufgaben

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Aufgaben

**Aufgabe 912.** In einem rechtwinkligen Dreieck  $ABC$  wird das Lot von einem Punkt  $D$  der Kathete  $\overline{AC}$  auf die Hypotenuse  $\overline{AB}$  gefällt. Der Fusspunkt sei  $E$ . Die Transversalen  $\overline{BD}$  und  $\overline{CE}$  schneiden sich in  $S$ . Durchläuft  $D$  die Seite  $AC$ , so beschreibt  $S$  eine durch  $A$  und  $C$  verlaufende Kurve  $k$ .  $T$  sei der Schnittpunkt von  $k$  mit dem Kreis um  $B$  durch  $C$ . Man zeige, dass  $BT$  den Winkel  $ABC$  drittelt.

M. Diederichs, Leichlingen, BRD

Lösung: Seien  $D_0$  der Schnittpunkt von  $BT$  mit  $AC$ , und  $E_0$  der Schnittpunkt von  $CT$  mit  $AB$ . Da  $T$  auf  $K$  liegt, ist  $\angle BE_0D_0 = 90^\circ$ . Somit ist  $BCD_0E_0$  ein zyklisches Viereck und  $\angle ABT = \angle E_0BD_0 = \angle E_0CD_0 = 90^\circ - \angle BCT$ . Da  $T$  auf dem genannten Kreis liegt, ist  $\triangle BCT$  gleichschenklig und  $\angle CBT = 180^\circ - 2\angle BCT$ . Also ist  $\angle CBT = 2\angle ABT$ .

J. Schaeer, Calgary, CDN

Weitere Lösungen sandten K. Bickel (Nürtingen, BRD), C. Bindschedler (Küschnacht), R. Bosshard (Zürich), P. Bundschuh (Köln, BRD), H. Frischknecht (Berneck), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), I. Paasche (München, BRD), Hj. Stocker (Wädenswil), P. Streckeisen (Zürich), M. Vowe (Therwil), K. Warneke (Vechta, BRD), R. Wyss (Flumenthal).

### Aufgabe 913. Compute the ratio

$$r = \frac{\sqrt[3]{2742} + \sqrt[3]{32540} - \sqrt[3]{96843}}{\sqrt[3]{4881} + \sqrt[3]{20388} - \sqrt[3]{86830}}$$

to a precision of 10 significant figures.

J. Waldvogel, Zürich

Solution: Let

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2742}, & y &= \sqrt[3]{32540}, & z &= -\sqrt[3]{96843}, \\ a &= \sqrt[3]{4881}, & b &= \sqrt[3]{20388}, & c &= -\sqrt[3]{86830}. \end{aligned}$$

Then it is easily checked that

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= -61561 = a^3 + b^3 + c^3, \\ x^3 y^3 z^3 &= -2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 457 \cdot 1627 \cdot 1699 = a^3 b^3 c^3, \end{aligned}$$

so that

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

Using the identity

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

we obtain

$$\begin{aligned} r &= \frac{a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab}{x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy} \\ &= \frac{3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2}{3(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2} \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \varepsilon \end{aligned}$$

where  $|\varepsilon| < 10^{-16}$ . Using a computer we now find

$$r = 0.90099584177 \dots$$

Kee-wai Lau, Hongkong

Weitere Lösungen sandten H. Bachmann (Zürich), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), P. Sakmann (Bern), Hj. Stocker (Wädenswil), P. Streckeisen (Zürich), K. Warneke (Vechta, BRD), R. Wyss (Flumenthal).

*Bemerkung der Redaktion:* P. Sakmann (Bern) ermittelte 1000 signifikante Stellen von  $r$ .

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis 10. April 1986 an Dr. H. Kappus. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44), Problem 862A (Band 36, S. 68), Problem 887A (Band 37, S. 151).

**Aufgabe 929.** Die Folge  $(a_n)$  sei definiert durch

$$a_0 = 2, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{3 + (-1)^n}{2} \quad (n \geq 0).$$

Man ermittle

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{[(n+1)/2]}}{a_n^2 - 1} \quad ([\cdot]: \text{Ganzteilstufung}).$$

M. Vowe, Therwil

**Aufgabe 930.** Mit den Bezeichnungen von Aufgabe 899 (El. Math. 39, 102–103 (1984)) und den Abkürzungen  $H$  bzw.  $G$  für das harmonische bzw. das geometrische Mittel der drei Innenwinkel gilt die Doppelungleichung

$$(3H/\pi)^3 \leq 2r/R \leq (3G/\pi)^3. \quad (*)$$

Man beweise den linken Teil von (\*).

V. D. Mascioni, Origlio

**Aufgabe 931.** Eine Gerade  $g_1$  verläuft durch den Eckpunkt  $A$  eines ebenen Dreiecks  $ABC$  und schneidet  $BC$  im Punkt  $D$ . Eine zweite Gerade  $g_2$  schneidet  $AB, AC, AD$  bzw. in  $F, E, G$ . Es sei  $x = \overline{BF}/\overline{FA}$ ,  $y = \overline{CE}/\overline{EA}$ ,  $z = \overline{DG}/\overline{GA}$ . Man charakterisiere diejenigen Geradenpaare  $(g_1, g_2)$ , für welche  $z$  a) das arithmetische, b) das harmonische, c) das geometrische Mittel von  $x$  und  $y$  ist.

G. Bercea, München, BRD

## Literaturüberschau

S. G. Michlin und S. Prössdorf: Singuläre Integraloperatoren. XII und 514 Seiten, DM 96.–. Akademie-Verlag, Berlin, 1980.

Es handelt sich hier um eine sehr ausführliche Darstellung der Theorie der singulären Integraloperatoren und -gleichungen. Behandelt werden sowohl der eindimensionale Fall als auch die mehrdimensionale Theorie auf Mannigfaltigkeiten. In beiden Fällen werden sowohl einfache singuläre Gleichungen als auch Systeme solcher Gleichungen untersucht. Zwei Kapitel sind der näherungsweisen Lösung singulärer Gleichungen gewidmet. Die Entwicklungen führen bis hin zu den neuesten Resultaten. Einige davon, insbesondere auf dem Gebiet der mehrdimensionalen Probleme, werden hier zum erstenmal in Buchform veröffentlicht, andere werden hier wohl überhaupt zum erstenmal publiziert. Die Autoren haben versucht, eine umfassende einheitliche Darstellung des Gegenstandes zu geben. Entsprechend ist das Buch sowohl geeignet, einem Studenten der höheren Semester einen Einstieg ins selbständige mathematische Arbeiten zu ermöglichen, als auch dem bereits tätigen Forscher als Nachschlagewerk zu dienen. Da die Behandlung des Stoffes weitgehend auf funktionalanalytischen Methoden basiert, sollte der Leser fundierte Kenntnisse auf diesem Gebiet besitzen.

K. Weber

G. Frey: Elementare Zahlentheorie. Vieweg Studium: Grundkurs Mathematik. Band 56. IX und 120 Seiten, DM 19.80. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden 1984.

Das hübsche Büchlein entstand aus einer einsemestrigen Vorlesung an der Universität des Saarlandes und richtet sich an alle Studenten, insbesondere auch Lehramtsstudenten, die sich die zur mathematischen Allgemeinbildung gehörigen Kenntnisse der Zahlentheorie aneignen möchten. Es betont den algebraischen Teil der elementaren Zahlentheorie, ohne allerdings mehr als die algebraischen Grundstrukturen vorauszusetzen, und ist auch als Vorbereitung für die algebraische Zahlentheorie gedacht. So findet man neben der Lehre der Teilbarkeit (Ideale in  $\mathbb{Z}$ ) und der Kongruenzen (endliche abelsche Gruppen) auch eine recht ausführliche Behandlung der Bewertungstheorie (Satz von Ostrowski, Approximation in  $\mathbb{Q}_p$ ) und die Theorie der quadratischen Reste und der quadratischen Formen im Rahmen einer lokal-global Theorie (Hilbert Symbol, Satz von Hasse-Minkowski). Das Kapitel über quadratische Zahlkörper führt in die algebraische Zahlentheorie ein und im Anhang wird der Primzahlsatz von Dirichlet bewiesen. Dem Text sind viele nützliche Übungsaufgaben beigegeben.

G. Frei