Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 40 (1985)

Heft: 5

Rubrik: Aufgaben

Aufgaben

Aufgabe 912. In einem rechtwinkligen Dreieck ABC wird das Lot von einem Punkt D der Kathete $\overline{AC}$ auf die Hypotenuse $\overline{AB}$ gefällt. Der Fusspunkt sei E. Die Transversalen $\overline{BD}$ und $\overline{CE}$ schneiden sich in S. Durchläuft D die Seite AC, so beschreibt S eine durch A und C verlaufende Kurve k. T sei der Schnittpunkt von k mit dem Kreis um B durch C. Man zeige, dass BT den Winkel ABC drittelt.

M. Diederichs, Leichlingen, BRD

Lösung: Seien D_0 der Schnittpunkt von BT mit AC, und E_0 der Schnittpunkt von CT mit AB. Da T auf K liegt, ist $\sphericalangle BE_0D_0 = 90°$. Somit ist BCD_0E_0 ein zyklisches Viereck und $\sphericalangle ABT = \sphericalangle E_0BD_0 = \sphericalangle E_0CD_0 = 90° - \sphericalangle BCT$. Da T auf dem genannten Kreis liegt, ist $\Delta\, BCT$ gleichschenklig und $\sphericalangle CBT = 180° - 2 \sphericalangle BCT$. Also ist $\sphericalangle CBT = 2 \sphericalangle ABT$.

J. Schaer, Calgary, CDN

Weitere Lösungen sandten K. Bickel (Nürtingen, BRD). C. Bindschedler (Küsnacht), R. Bosshard (Zürich), P. Bundschuh (Köln, BRD), H. Frischknecht (Berneck), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), I. Paasche (München, BRD), Hj. Stocker (Wädenswil), P. Streckeisen (Zürich), M. Vowe (Therwil), K. Warneke (Vechta, BRD), R. Wyss (Flumenthal).

Aufgabe 913. Compute the ratio

$$r = \frac{\sqrt[3]{2742} + \sqrt[3]{32540} - \sqrt[3]{96843}}{\sqrt[3]{4881} + \sqrt[3]{20388} - \sqrt[3]{86830}}$$

to a precision of 10 significant figures.

J. Waldvogel, Zürich

Solution: Let

$$x = \sqrt[3]{2742}, \qquad y = \sqrt[3]{32540}, \qquad z = -\sqrt[3]{96843},$$
$$a = \sqrt[3]{4881}, \qquad b = \sqrt[3]{20388}, \qquad c = -\sqrt[3]{86830}.$$

Then it is easily checked that

$$x^3 + y^3 + z^3 = -61561 = a^3 + b^3 + c^3,$$
$$x^3y^3z^3 = -2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 457 \cdot 1627 \cdot 1699 = a^3b^3c^3,$$

so that

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

Using the identity

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)=x^3+y^3+z^3-3xyz$$

we obtain

$$\begin{aligned} r &= \frac{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}{x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy} \\ &= \frac{3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2}{3(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2} \\ &= \frac{a^2+b^2+c^2}{x^2+y^2+z^2}+\varepsilon \end{aligned}$$

where $|\varepsilon| < 10^{-16}$. Using a computer we now find

$$r = 0.90099584177\ldots$$

Kee-wai Lau, Hongkong

Weitere Lösungen sandten H. Bachmann (Zürich), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), P. Sakmann (Bern), Hj. Stocker (Wädenswil), P. Streckeisen (Zürich), K. Warneke (Vechta, BRD), R. Wyss (Flumenthal).
Bemerkung der Redaktion: P. Sakmann (Bern) ermittelte 1000 signifikante Stellen von r.

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. April 1986* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67). Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44), Problem 862A (Band 36, S. 68), Problem 887A (Band 37, S. 151).

Aufgabe 929. Die Folge (a_n) sei definiert durch

$$a_0 = 2, \qquad a_{n+1} = a_n + \frac{3+(-1)^n}{2} \quad (n \geqslant 0).$$

Man ermittle

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{[(n+1)/2]}}{a_n^2 - 1} \quad ([\ ]\text{: Ganzteilfunktion}).$$

M. Vowe, Therwil

Aufgabe 930. Mit den Bezeichnungen von Aufgabe 899 (El. Math. *39*, 102–103 (1984)) und den Abkürzungen H bzw. G für das harmonische bzw. das geometrische Mittel der drei Innenwinkel gilt die Doppelungleichung

$$(3H/\pi)^3 \leqslant 2r/R \leqslant (3G/\pi)^3. \qquad (*)$$

Man beweise den linken Teil von (*).

V. D. Mascioni, Origlio

Aufgabe 931. Eine Gerade g_1 verläuft durch den Eckpunkt A eines ebenen Dreiecks ABC und schneidet BC im Punkt D. Eine zweite Gerade g_2 schneidet AB, AC, AD bzw. in F, E, G. Es sei $x = \overline{BF}/\overline{FA}$, $y = \overline{CE}/\overline{EA}$, $z = \overline{DG}/\overline{GA}$. Man charakterisiere diejenigen Geradenpaare (g_1, g_2), für welche z a) das arithmetische, b) das harmonische, c) das geometrische Mittel von x und y ist.

G. Bercea, München, BRD

Literaturüberschau

S. G. Michlin und S. Prössdorf: Singuläre Integraloperatoren. XII und 514 Seiten, DM 96.–. Akademie-Verlag, Berlin, 1980.

Es handelt sich hier um eine sehr ausführliche Darstellung der Theorie der singulären Integraloperatoren und -gleichungen. Behandelt werden sowohl der eindimensionale Fall als auch die mehrdimensionale Theorie auf Mannigfaltigkeiten. In beiden Fällen werden sowohl einfache singuläre Gleichungen als auch Systeme solcher Gleichungen untersucht. Zwei Kapitel sind der näherungsweisen Lösung singulärer Gleichungen gewidmet.

Die Entwicklungen führen bis hin zu den neuesten Resultaten. Einige davon, insbesondere auf dem Gebiet der mehrdimensionalen Probleme, werden hier zum erstenmal in Buchform veröffentlicht, andere werden hier wohl überhaupt zum erstenmal publiziert. Die Autoren haben versucht, eine umfassende einheitliche Darstellung des Gegenstandes zu geben. Entsprechend ist das Buch sowohl geeignet, einem Studenten der höheren Semester einen Einstieg ins selbständige mathematische Arbeiten zu ermöglichen, als auch dem bereits tätigen Forscher als Nachschlagewerk zu dienen. Da die Behandlung des Stoffes weitgehend auf funktionalanalytischen Methoden basiert, sollte der Leser fundierte Kenntnisse auf diesem Gebiet besitzen.

K. Weber

G. Frey: Elementare Zahlentheorie. Vieweg Studium: Grundkurs Mathematik. Band 56. IX und 120 Seiten, DM 19.80. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden 1984.

Das hübsche Büchlein entstand aus einer einsemestrigen Vorlesung an der Universität des Saarlandes und richtet sich an alle Studenten, insbesondere auch Lehramtsstudenten, die sich die zur mathematischen Allgemeinbildung gehörigen Kenntnisse der Zahlentheorie aneignen möchten. Es betont den algebraischen Teil der elementaren Zahlentheorie, ohne allerdings mehr als die algebraischen Grundstrukturen vorauszusetzen, und ist auch als Vorbereitung für die algebraische Zahlentheorie gedacht. So findet man neben der Lehre der Teilbarkeit (Ideale in $\mathbf{Z}$) und der Kongruenzen (endliche abelsche Gruppen) auch eine recht ausführliche Behandlung der Bewertungstheorie (Satz von Ostrowski, Approximation in $\mathbf{Q}_p$) und die Theorie der quadratischen Reste und der quadratischen Formen im Rahmen einer lokal-global Theorie (Hilbert Symbol, Satz von Hasse-Minkowski). Das Kapitel über quadratische Zahlkörper führt in die algebraische Zahlentheorie ein und im Anhang wird der Primzahlsatz von Dirichlet bewiesen. Dem Text sind viele nützliche Übungsaufgaben beigegeben.

G. Frei