Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 40 (1985)
Heft: 5

Artikel: Über die Konstruktion der Jordanschen Normalform
Autor: Lesky, Peter
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-38836

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

El. Math. | Band 40 | Nr. 5 | Seiten 105–128 | Basel, 10. September 1985

Über die Konstruktion der Jordanschen Normalform

Bei den verschiedenen Verfahren zur Gewinnung der Jordanschen Normalform J einer quadratischen n-reihigen Matrix A kommt den Hauptvektorketten besondere Bedeutung zu: Die Hauptvektorketten erzeugen unmittelbar eine Transformationsmatrix X für die gesuchte Ähnlichkeitstransformation $X^{-1}AX=J$. Daher wird selbst die Theorie der Jordanschen Normalform manchmal über die Hauptvektorketten entwickelt (z. B. in [1–3]). Daneben treten eigenartigerweise die praktischen Möglichkeiten zur Konstruktion der Hauptvektorketten in den Hintergrund (so werden z. B. in [1] die Hauptvektorketten zwar theoretisch verwendet, die Konstruktion einer Transformationsmatrix soll dagegen unabhängig davon über die Lösung des linearen Gleichungssystems $AX=XJ$ erfolgen). Diesen *praktischen* Konstruktionsmöglichkeiten sind die folgenden Ausführungen gewidmet (daher wird auf Beweise verzichtet).

Die quadratische n-reihige Matrix A mit komplexen Elementen besitze die *charakteristische Gleichung*

$$(|\lambda E - A| =)\,(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_m)^{n_m}=0, \tag{1}$$

in der die *Eigenwerte* λ_i mit den Vielfachheiten n_i auftreten ($n_1+n_2+\cdots+n_m=n$). Dann genügt A der Matrizengleichung

$$(A-\lambda_1 E)^{n_1}(A-\lambda_2 E)^{n_2}\cdots(A-\lambda_m E)^{n_m}=0. \tag{2}$$

Wir gehen davon aus, dass mindestens für ein i ($i=1,2,\ldots,m$) der Rang $n-r_i$ von $A-\lambda_i E$ grösser als $n-n_i$ ist, denn sonst besteht für A Diagonalähnlichkeit. Der *Rangabfall* r_i gibt die Anzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren der Matrix A zum Eigenwert λ_i an.

Die Lösungsvektoren $\boldsymbol{z}=(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ von

$$(A-\lambda_i E)^{n_i}\boldsymbol{z}'=\boldsymbol{0}' \tag{3}$$

erzeugen für jedes i ($i=1,2,\ldots,m$) einen n_i-dimensionalen Teilraum Z_i von $\mathbf{C}^n$ ($\boldsymbol{z}'$ ist der aus $\boldsymbol{z}$ durch Transposition hervorgehende Spaltenvektor). Die m Teilräume Z_i des $\mathbf{C}^n$ sind paarweise disjunkt.

Zur Vorbereitung des folgenden Verfahrens bestimmen wir unter Verwendung von (3) je n_i Basisvektoren $\boldsymbol{b}_{i1},\boldsymbol{b}_{i2},\ldots,\boldsymbol{b}_{in_i}$ der Teilräume Z_i. Auf diese Weise ergeben sich insgesamt $n_1+n_2+\cdots+n_m=n$ Basisvektoren des $\mathbf{C}^n$.

Erster Schritt im Teilraum Z_1: Wir ziehen die n_1 Basisvektoren des Z_1 heran und wenden auf diese sukzessive $A-\lambda_1 E$ (von links) an:

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{b}'_{11},\quad \boldsymbol{b}'_{12},\ldots,\boldsymbol{b}'_{1n_1};\\ (A-\lambda_1 E)\boldsymbol{b}'_{11},\quad (A-\lambda_1 E)\boldsymbol{b}'_{12},\ldots,(A-\lambda_1 E)\boldsymbol{b}'_{1n_1};\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (A-\lambda_1 E)^{p_1-1}\boldsymbol{b}'_{11},\quad (A-\lambda_1 E)^{p_1-1}\boldsymbol{b}'_{12},\ldots,(A-\lambda_1 E)^{p_1-1}\boldsymbol{b}'_{1n_1}. \end{array} \tag{4}$$

Da $(A-\lambda_1 E)^{n_1}\boldsymbol{z}'=\boldsymbol{0}'$ für jeden Vektor $\boldsymbol{z}$ des Teilraumes Z_1 von $\mathbf{C}^n$ gilt, können wir die natürliche Zahl $p_1(\leqq n_1)$ so wählen, dass in der letzten Zeile von (4) mindestens ein Vektor vom Nullvektor verschieden ist und bei nochmaliger Anwendung von $A-\lambda_1 E$ (von links) lauter Nullvektoren entstehen. Dann sind alle vom Nullvektor verschiedenen Vektoren in der letzten Zeile von (4) Eigenvektoren der Matrix A zum Eigenwert λ_1.
Ist in der letzten Zeile von (4) nur $(A-\lambda_1 E)^{p_1-1}\boldsymbol{b}'_{11}$ vom Nullvektor verschieden, dann können wir aus (4) unmittelbar

$$\boldsymbol{b}'_{11},\quad (A-\lambda_1 E)\boldsymbol{b}'_{11},\quad (A-\lambda_1 E)^2\boldsymbol{b}'_{11},\ldots,(A-\lambda_1 E)^{p_1-1}\boldsymbol{b}'_{11}=\boldsymbol{x}'_{11} \tag{5}$$

als *Hauptvektorkette mit der Maximallänge* p_1 entnehmen. Deren *Endvektor* $\boldsymbol{x}'_{11}$ ist wegen $(A-\lambda_1 E)\boldsymbol{x}'_{11}=\boldsymbol{0}'$ ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ_1; für die p_1 Vektoren der Kette besteht lineare Unabhängigkeit.
Sind mehrere Vektoren der letzten Zeile von (4) vom Nullvektor verschieden, dann müssen unter diesen die linear unabhängigen Eigenvektoren ausgewählt werden. Wie vorhin gehen dann zu diesen Eigenvektoren aus (4) die weiteren Vektoren der zugehörigen Hauptvektorketten hervor. Mit der linearen Unabhängigkeit der Eigenvektoren besteht auch die lineare Unabhängigkeit aller Vektoren der zugehörigen Ketten. Somit sind alle Hauptvektorketten mit der Maximallänge p_1 bestimmt.
Zweiter Schritt im Teilraum Z_1: Aus der vorletzten Zeile von (4) entstehen Eigenvektoren, die Endvektoren von Hauptvektorketten der Länge p_1-1 sind. Zur Gewinnung dieser Eigenvektoren verwenden wir die *Linearkombinationen* der Vektoren aus der vorletzten Zeile von (4), die nach nochmaliger Anwendung von $A-\lambda_1 E$ (von links) auf den Nullvektor führen (darunter kommen natürlich alle Eigenvektoren aus dem ersten Schritt vor). Unter den entstehenden Eigenvektoren wählen wir diejenigen aus, die von den Endvektoren der Hauptvektorketten aus dem ersten Schritt und untereinander linear unabhängig sind. Mit den gleichen *Linearkombinationen,* die zu diesen Eigenvektoren geführt haben, setzen wir aus den Vektoren der vorhergehenden Zeilen von (4) die zugehörigen Hauptvektorketten der Länge p_1-1 zusammen. Mit der linearen Unabhängigkeit der Eigenvektoren besteht auch die lineare Unabhängigkeit aller Kettenvektoren, die bisher konstruiert wurden.
Weitere Schritte im Teilraum Z_1: Dieses Verfahren setzen wir so lange fort, bis r_1 linear unabhängige Eigenvektoren der Matrix A zum Eigenwert λ_1 und zusammen mit den zugehörigen Kettenvektoren n_1 linear unabhängige Vektoren des Teilraumes Z_1 von $\mathbf{C}^n$ gefunden sind.
Gehen wir so mit allen Teilräumen $Z_i(i=1,2,\ldots,m)$ des $\mathbf{C}^n$ vor, dann ergeben sich schliesslich $r_1+r_2+\cdots+r_m=r$ linear unabhängige Eigenvektoren und zusammen mit den zugehörigen Kettenvektoren n linear unabhängige Vektoren des $\mathbf{C}^n$.
Jede auftretende Hauptvektorkette mit der Länge p liefert ein *Jordankästchen* der Länge p in der *Jordanschen Normalform,* so dass r_i Jordankästchen zum Eigenwert λ_i entstehen. Diese liegen selbstverständlich nur bis auf die Reihenfolge eindeutig fest.

Die *Ähnlichkeitstransformation* veranschaulichen wir am speziellen Fall einer dreireihigen Matrix A mit dem dreifachen Eigenwert λ_1 und der Hauptvektorkette $\boldsymbol{b}_1'$, $(A-\lambda_1 E)\boldsymbol{b}_1'$, $(A-\lambda_1 E)^2\boldsymbol{b}_1' = \boldsymbol{x}_1'$ ($\boldsymbol{x}_1'$ ist bis auf einen konstanten Faktor der einzige Eigenvektor von A zu λ_1). Mit der Transformationsmatrix $X = (\boldsymbol{x}_1', (A-\lambda_1 E)\boldsymbol{b}_1', \boldsymbol{b}_1')$, in der die Hauptvektorketten immer in der umgekehrten Reihenfolge auftreten, und der inversen Matrix

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix}$$

erhalten wir unter Verwendung von $A\boldsymbol{x}_1' = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1'$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix} A\,(\boldsymbol{x}_1', (A-\lambda_1 E)\boldsymbol{b}_1', \boldsymbol{b}_1')$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix} (\lambda_1 \boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_1' + \lambda_1(A-\lambda_1 E)\boldsymbol{b}_1', (A-\lambda_1 E)\boldsymbol{b}_1' + \lambda_1 \boldsymbol{b}_1') = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 5 & -4 & 2 \end{pmatrix};$$

fünffacher Eigenwert $\lambda_1 = 1$,
einfacher Eigenwert $\lambda_2 = 2$;
der Rang von $A - \lambda_1 E$ ist vier,
der Rang von $A - \lambda_2 E$ ist fünf.

a) Eigenwert $\lambda_1 = 1$: Zur Bestimmung einer Basis des Teilraumes Z_1 berechnen wir

$$(A-\lambda_1 E)^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

als Basisvektoren werden $\boldsymbol{b}_1 = (1,0,0,0,0,0)$, $\boldsymbol{b}_2 = (0,1,0,0,0,1)$, $\boldsymbol{b}_3 = (0,0,1,0,-1,0)$, $\mathbf{b}_4 = (0,0,0,1,1,-1)$, $\boldsymbol{b}_5 = (0,0,0,0,1,2)$ verwendet. Wir schreiben diese als Spaltenvektoren einer Matrix und wenden darauf $A - \lambda_1 E$ (von links) an:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 5 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Auf die entstehende Matrix wenden wir nochmals $A - \lambda_1 E$ (von links) an:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 5 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nochmalige Anwendung von $A - \lambda_1 E$ (von links) liefert die Nullmatrix. Es entstehen zwei Hauptvektorketten der Maximallänge drei, die (bis auf das Vorzeichen) zum Eigenvektor $\boldsymbol{x}_{11} = (0,0,0,1,1,-1)$ von A zu λ_1 als Endvektor führen. Davon verwenden wir eine Kette:

$$\mathbf{b}_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (A - \lambda_1 E)\boldsymbol{b}_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_{11} = (A - \lambda_1 E)^2 \boldsymbol{b}_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aus dem vorletzten Schritt gewinnen wir durch

$$(A - \lambda_1 E)\boldsymbol{b}_2' + (A - \lambda_1 E)\boldsymbol{b}_5' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}_{12}'$$

den zweiten linear unabhängigen Eigenvektor von A zu λ_1, der Endvektor einer Hauptvektorkette mit der Länge zwei ist. Über die gleiche Linearkombination der Basisvektoren finden wir den Ausgangsvektor dieser Hauptvektorkette:

$$\boldsymbol{b}_2' + \boldsymbol{b}_5' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Damit liegen die fünf linear unabhängigen Vektoren des Teilraumes Z_1 vor.

b) Eigenwert $\lambda_2 = 2$: Hier erhalten wir $\boldsymbol{x}_2' = (0,0,0,0,0,1)$ als Eigenvektor von A zu λ_2; damit steht der einzige linear unabhängige Vektor des Teilraumes Z_2 fest.

c) Da in der Transformationsmatrix X die Hauptvektorketten in der umgekehrten Reihenfolge auftreten, erhalten wir insgesamt folgende Ähnlichkeitstransformation $X^{-1}AX = J$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 5 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Peter Lesky, Math. Institut A,
Universität Stuttgart

LITERATURVERZEICHNIS

1 A. I. Kostrikin: Introduction to Algebra. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1982.
2 W. Schmeidler: Vorträge über Determinanten und Matrizen mit Anwendungen in Physik und Technik. Akademie-Verlag, Berlin 1949.
3 R. Zurmühl und S. Falk: Matrizen und ihre Anwendungen, 5. Aufl., Teil 1. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1984.

 0013-6018/85/060105-05$1.50 + 0.20/0

Statistische Inferenz und strategisches Spiel

1. Einleitung

Der Entscheidungsträger (z. B. der Statistiker, der Unternehmer, der Staat usw.) sieht sich oft in der Lage, aus einer Menge $A = \{a_i\}$ [1]) von *Aktionen* oder *Entscheidungen* eine in einem gewissen Sinne *optimale* auszuwählen, und zwar angesichts einer *unsichern* Umwelt. Von dieser nehmen wir an, dass sie die relevanten Zustände $z_j \in Z$ annehmen kann. Wählt der Entscheidungsträger eine Aktion a_i im Zustand z_j, so resultiert ein Ergebnis $e_{ij} \in E$. Mit Hilfe der *Nutzenaxiomatik* nach J. v. Neumann oder Luce-Raiffa [4], S. 105ff.,

---

1) Wir beschränken uns auf endliche Mengen.