

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 40 (1985)
Heft: 5

Artikel: Über die Konstruktion der Jordanschen Normalform
Autor: Lesky, Peter
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-38836>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 09.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

El. Math.

Band 40

Nr. 5

Seiten 105–128

Basel, 10. September 1985

Über die Konstruktion der Jordanschen Normalform

Bei den verschiedenen Verfahren zur Gewinnung der Jordanschen Normalform J einer quadratischen n -reihigen Matrix A kommt den Hauptvektorketten besondere Bedeutung zu: Die Hauptvektorketten erzeugen unmittelbar eine Transformationsmatrix X für die gesuchte Ähnlichkeitstransformation $X^{-1}AX = J$. Daher wird selbst die Theorie der Jordanschen Normalform manchmal über die Hauptvektorketten entwickelt (z. B. in [1–3]). Daneben treten eigenartigerweise die praktischen Möglichkeiten zur Konstruktion der Hauptvektorketten in den Hintergrund (so werden z. B. in [1] die Hauptvektorketten zwar theoretisch verwendet, die Konstruktion einer Transformationsmatrix soll dagegen unabhängig davon über die Lösung des linearen Gleichungssystems $AX = XJ$ erfolgen). Diesen *praktischen* Konstruktionsmöglichkeiten sind die folgenden Ausführungen gewidmet (daher wird auf Beweise verzichtet).

Die quadratische n -reihige Matrix A mit komplexen Elementen besitze die *charakteristische Gleichung*

$$(|\lambda E - A| =) (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{n_m} = 0, \quad (1)$$

in der die *Eigenwerte* λ_i mit den Vielfachheiten n_i auftreten ($n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$). Dann genügt A der Matrizengleichung

$$(A - \lambda_1 E)^{n_1} (A - \lambda_2 E)^{n_2} \cdots (A - \lambda_m E)^{n_m} = 0. \quad (2)$$

Wir gehen davon aus, dass mindestens für ein i ($i = 1, 2, \dots, m$) der Rang $n - r_i$ von $A - \lambda_i E$ grösser als $n - n_i$ ist, denn sonst besteht für A Diagonalähnlichkeit. Der *Rangabfall* r_i gibt die Anzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren der Matrix A zum Eigenwert λ_i an.

Die Lösungsvektoren $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ von

$$(A - \lambda_i E)^{n_i} \mathbf{z}' = \mathbf{0}' \quad (3)$$

erzeugen für jedes i ($i = 1, 2, \dots, m$) einen n_i -dimensionalen Teilraum Z_i von \mathbb{C}^n (\mathbf{z}' ist der aus \mathbf{z} durch Transposition hervorgehende Spaltenvektor). Die m Teilräume Z_i des \mathbb{C}^n sind paarweise disjunkt.

Zur Vorbereitung des folgenden Verfahrens bestimmen wir unter Verwendung von (3) je n_i Basisvektoren $\mathbf{b}_{i1}, \mathbf{b}_{i2}, \dots, \mathbf{b}_{in_i}$ der Teilräume Z_i . Auf diese Weise ergeben sich insgesamt $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$ Basisvektoren des \mathbb{C}^n .

Erster Schritt im Teilraum Z_1 : Wir ziehen die n_1 Basisvektoren des Z_1 heran und wenden auf diese sukzessive $A - \lambda_1 E$ (von links) an:

Die *Ähnlichkeitstransformation* veranschaulichen wir am speziellen Fall einer dreireihigen Matrix A mit dem dreifachen Eigenwert λ_1 und der Hauptvektorkette $\mathbf{b}'_1, (A - \lambda_1 E)\mathbf{b}'_1, (A - \lambda_1 E)^2\mathbf{b}'_1 = \mathbf{x}'_1$ (\mathbf{x}'_1 ist bis auf einen konstanten Faktor der einzige Eigenvektor von A zu λ_1). Mit der Transformationsmatrix $X = (\mathbf{x}'_1, (A - \lambda_1 E)\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_1)$, in der die Hauptvektorketten immer in der umgekehrten Reihenfolge auftreten, und der inversen Matrix

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix}$$

erhalten wir unter Verwendung von $A\mathbf{x}'_1 = \lambda_1\mathbf{x}'_1$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} A(\mathbf{x}'_1, (A - \lambda_1 E)\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_1) \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} (\lambda_1\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_1 + \lambda_1(A - \lambda_1 E)\mathbf{b}'_1, (A - \lambda_1 E)\mathbf{b}'_1 + \lambda_1\mathbf{b}'_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 5 & -4 & 2 \end{pmatrix}; \begin{array}{l} \text{fünffacher Eigenwert } \lambda_1 = 1, \\ \text{einfacher Eigenwert } \lambda_2 = 2; \\ \text{der Rang von } A - \lambda_1 E \text{ ist vier,} \\ \text{der Rang von } A - \lambda_2 E \text{ ist fünf.} \end{array}$$

a) Eigenwert $\lambda_1 = 1$: Zur Bestimmung einer Basis des Teilraumes Z_1 berechnen wir

$$(A - \lambda_1 E)^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

als Basisvektoren werden $\mathbf{b}_1 = (1,0,0,0,0,0)$, $\mathbf{b}_2 = (0,1,0,0,0,1)$, $\mathbf{b}_3 = (0,0,1,0,-1,0)$, $\mathbf{b}_4 = (0,0,0,1,1,-1)$, $\mathbf{b}_5 = (0,0,0,0,1,2)$ verwendet. Wir schreiben diese als Spaltenvektoren einer Matrix und wenden darauf $A - \lambda_1 E$ (von links) an:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 5 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Auf die entstehende Matrix wenden wir nochmals $A - \lambda_1 E$ (von links) an:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 5 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nochmalige Anwendung von $A - \lambda_1 E$ (von links) liefert die Nullmatrix. Es entstehen zwei Hauptvektorketten der Maximallänge drei, die (bis auf das Vorzeichen) zum Eigenvektor $x_{11} = (0,0,0,1,1, - 1)$ von A zu λ_1 als Endvektor führen. Davon verwenden wir eine Kette:

$$b'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (A - \lambda_1 E)b'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_{11} = (A - \lambda_1 E)^2 b'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aus dem vorletzten Schritt gewinnen wir durch

$$(A - \lambda_1 E)b'_2 + (A - \lambda_1 E)b'_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = x'_{12}$$

den zweiten linear unabhängigen Eigenvektor von A zu λ_1 , der Endvektor einer Hauptvektorkette mit der Länge zwei ist. Über die gleiche Linearkombination der Basisvektoren finden wir den Ausgangsvektor dieser Hauptvektorkette:

$$b'_2 + b'_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Damit liegen die fünf linear unabhängigen Vektoren des Teilraumes Z_1 vor.

b) Eigenwert $\lambda_2 = 2$: Hier erhalten wir $x'_2 = (0,0,0,0,0, 1)$ als Eigenvektor von A zu λ_2 ; damit steht der einzige linear unabhängige Vektor des Teilraumes Z_2 fest.

c) Da in der Transformationsmatrix X die Hauptvektorketten in der umgekehrten Reihenfolge auftreten, erhalten wir insgesamt folgende Ähnlichkeitstransformation $X^{-1}AX = J$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 5 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Peter Lesky, Math. Institut A,
Universität Stuttgart

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 A. I. Kostrikin: Introduction to Algebra. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1982.
- 2 W. Schmeidler: Vorträge über Determinanten und Matrizen mit Anwendungen in Physik und Technik. Akademie-Verlag, Berlin 1949.
- 3 R. Zurmühl und S. Falk: Matrizen und ihre Anwendungen, 5. Aufl., Teil 1. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1984.

Statistische Inferenz und strategisches Spiel

1. Einleitung

Der Entscheidungsträger (z. B. der Statistiker, der Unternehmer, der Staat usw.) sieht sich oft in der Lage, aus einer Menge $A = \{a_{ij}\}^1$ von *Aktionen* oder *Entscheidungen* eine in einem gewissen Sinne *optimale* auszuwählen, und zwar angesichts einer *unsicheren* Umwelt. Von dieser nehmen wir an, dass sie die relevanten Zustände $z_j \in Z$ annehmen kann. Wählt der Entscheidungsträger eine Aktion a_i im Zustand z_j , so resultiert ein Ergebnis $e_{ij} \in E$. Mit Hilfe der *Nutzenaxiomatik* nach J. v. Neumann oder Luce-Raiffa [4], S. 105ff.,

1) Wir beschränken uns auf endliche Mengen.