Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 40 (1985)

Heft: 4

Rubrik: Aufgaben

Gilt nun Gleichheit in (1), so muss insbesondere $L(U_\varphi)$ konstant sein. Aus (3) folgt dann durch Differenzieren (und wegen der Periodizität von h_K)

$$h'_K(\varphi) = \frac{1}{2}\left[h_K\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) - h_K\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

für alle φ. Es ist bekannt (Fejes Tóth [1], S. 37–38), dass hieraus

$$h_K(\varphi) = a_0 + a_1 \cos\varphi + b_1 \sin\varphi$$

mit Konstanten a_0, a_1, b_1 folgt; K ist also ein Kreis.

R. Schneider und J. A. Wieacker, Freiburg i. Br.

LITERATURVERZEICHNIS

1 L. Fejes Tóth: Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1953.

2 H. Joris: Le chasseur perdu dans la forêt (Un problème de géométrie plane). El. Math. *35*, 1–14 (1980).

 0013-6018/85/060098-02$1.50 + 0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 910. Die Polynomfolge $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$p_1(x) = x, \qquad p_{n+1}(x) = x(1-x)p'_n(x); \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Man ermittle für jedes $n \in \mathbf{N}$ die Menge der rationalen Nullstellen von p_n.

H. Müller, Hamburg, BRD

Solution: Let N_n be the set of all rational zeros of p_n. Then clearly $N_1 = \{0\}, N_n \supseteq \{0,1\}$ for all $n > 1$. By induction on n one easily shows that

(1) p_n is an integer polynomial of degree n with n simple real zeros in the interval $[0,1]$.

(2) $p_n(1-x) = (-1)^n p_n(x)$ for $n > 1$.

(3) $p_n(0) = 0$ and $p'_n(0) = 1$.

For the proof of (1) one uses the mean-value theorem. It follows from (2) that $\frac{1}{2} \in N_n$ for all odd $n > 1$. Consequently $\frac{1}{2} \notin N_{n+1}$ if n is odd, since all zeros of p_n are simple as mentioned in (1). Let q_n be defined by $q_n(x) = x^n p_n(1/x)$. Then q_n is a monic integer polynomial of degree $n-1$, in view of (1) and (3), and hence all its rational zeros are integers. This fact in combination with (2) shows that any $x \in N_n$ with $x \neq 0, x \neq 1$ is at the same time of the form $x = 1/k$ and $x = 1-(1/m)$ for some integers k, m, i.e. if and only if $x = \frac{1}{2}$. We conclude that for all $m \in \mathbf{N}, m \geqslant 1$:

$$N_{2m} = \{0,1\}, \qquad N_{2m+1} = \{0, \tfrac{1}{2}, 1\}.$$

A. A. Jagers, Enschede, NL

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht), P. Bundschuh (Köln, BRD), Kee-wai Lau (Hongkong), Hj. Stocker (Wädenswil).

Aufgabe 911. Man zeige, dass für $x \geqslant 0$

$$\left|\frac{\pi}{4} - \arctan x\right| \leqslant \frac{\pi}{4}\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Wann genau steht das Gleichheitszeichen?

V. D. Mascioni, Origlio

Lösung (von der Redaktion gekürzt): Durch die Substitution $x = \tan\left(z + \frac{\pi}{4}\right)$ geht die zu beweisende Ungleichung nach einfacher trigonometrischer Umformung in

$$|z| \leqslant \frac{\pi}{4}\sqrt{2}\,|\sin z|; \qquad -\frac{\pi}{4} \leqslant z < \frac{\pi}{4}$$

über. Diese ist offensichtlich erfüllt, da die Funktion $z \mapsto \sin z$ ungerade und im Intervall $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ konkav ist. Gleichheit gilt genau für $z = -\frac{\pi}{4}$ und $z = 0$, d.h. für $x = 0$ und $x = 1$.

U. Abel, Giessen, BRD

Weitere Lösungen sandten S. Arslanagić (Trebinje, YU), C. Bindschedler (Küsnacht), E. Braune (Linz, A), O. Buggisch (Darmstadt, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), L. Cseh (Cluj, Rumänien), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), Kee-wai Lau (Hongkong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), Hj. Stocker (Wädenswil), U. Tipp (Soest, BRD), M. Vowe (Therwil), H. Widmer (Rieden), K. Zacharias (Berlin).

Nachtrag zu Aufgabe 901: Eine weitere Lösung sandte O. P. Lossers (Eindhoven, NL).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Februar 1986* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68). Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91) Problem 764A (Band 31, S. 44), Problem 862A (Band 36, S. 68), Problem 872A (Band 36, S. 175).

Aufgabe 926. Man berechne die Nullstellen der Polynome P_n mit

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+k}{n-k} x^k; \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Hj. Stocker, Wädenswil

Aufgabe 927. Zwei in einer Ebene liegende kongruente Kreise $k(M, r)$ und $k'(M', r)$ mit $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$ seien gegeben. P sei ein variabler Punkt auf k, Q das Bild von P bei der Spiegelung an der Tangente von k' im Punkt P' mit $\overrightarrow{PP'} = \vec{a}$. Man ermittle den geometrischen Ort von Q.

L. Kuipers, Sierre

Aufgabe 928. Es seien $k > 3$ und n natürliche Zahlen. Jedes konvexe $[(k-2)n+2]$-Eck lässt sich durch $n-1$ seiner Diagonalen in n k-Ecke zerlegen. Man berechne die Anzahl $a_{n,k}$ der möglichen Zerlegungen.

J. Binz, Bolligen

Literaturüberschau

A. Ostrowski: Collected Mathematical Papers. 1. Teil: Determinant – Linear Algebra – Algebraic Equations. 904 Seiten, Fr. 129.–, Birkhäuser, Basel – Boston – Stuttgart, 1983.
Die eigentlichen Lehrbücher nicht eingerechnet, werden die gesammelten Werke von Alexander Ostrowski (*1893) sechs Bände umfassen. Mehr noch als das schiere Gewicht dieser Arbeiten beeindruckt die Breite des darin abgeschrittenen mathematischen Raumes. Die insgesamt 265 Arbeiten sind in 16 Teildisziplinen je chronologisch angeordnet. Das geht von der Algebra über die Zahlentheorie, Funktionentheorie, reelle Analysis in angewandte Gebiete, vor allem die numerische Analysis.
Die vorliegenden beiden ersten Bände enthalten die Arbeiten zu algebraischen Themen. Innerhalb des Teilgebiets «Lineare Algebra» erscheinen allerdings auch zahlreiche Arbeiten über die numerische Bestimmung von Eigenwerten u. ä., die auch den «Praktiker» interessieren dürften. Im zweiten Band findet man natürlich die bekannteste Arbeit von Ostrowski: «Über einige Lösungen der Funktionalgleichung $\varphi(x) \cdot \varphi(y) = \varphi(xy)$» [Acta Math. 41 (1918)]. Unter diesem Titel wird zum ersten Mal bewiesen, was seither in alle Algebra-Lehrbücher als «Satz von Ostrowski» Eingang gefunden hat: dass nämlich $\mathbf{R}$ und $\mathbf{C}$ die einzigen bezüglich einer archimedischen Bewertung vollständigen Körper sind.

C. Blatter