Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 40 (1985)
Heft: 4

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Kleine Mitteilungen

Einschliessung ebener Kurven

Von einer Kurve in der euklidischen Ebene sagen wir, dass sie die Menge K einschliesst, wenn K in der konvexen Hülle der Kurve enthalten ist. Für eine geschlossene, rektifizierbare Kurve K der Länge $L(K)$ bezeichne $L^*(K)$ das Infimum der Längen aller rektifizierbaren Kurven (zusammenhängend, aber nicht notwendig geschlossen), die K einschliessen. Wir zeigen die Ungleichung

$$L^*(K) \leqq \frac{2+\pi}{2\pi} L(K), \tag{1}$$

in der Gleichheit genau dann gilt, wenn K ein Kreis ist. Dass für Kreise Gleichheit gilt, hat Joris [2] gezeigt.

Da bei nichtkonvexen geschlossenen Kurven der Rand der konvexen Hülle stets kleinere Länge hat, dürfen wir uns zum Beweis der Ungleichung (1) auf konvexe Kurven K beschränken. Für eine solche Kurve ist durch $h_K(\varphi) = \mathrm{Max}\{\langle x, e_\varphi\rangle : x \in K\}$ die Stützfunktion h_K definiert; dabei ist in der Ebene ein kartesisches Koordinatensystem eingeführt, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bezeichnet das Skalarprodukt und e_φ den Einheitsvektor $(\cos\varphi, \sin\varphi)$. Bekanntlich gilt

$$L(K) = \int_0^{2\pi} h_K(\varphi)\, d\varphi. \tag{2}$$

$S(\varphi)$ sei die Stützgerade an K mit äusserem Normalenvektor e_φ. Für gegebenen Winkel φ sei $s^\pm$ der Schnittpunkt von $S(\varphi)$ mit $S(\varphi \pm \pi/2)$ und $t^\pm$ der zu $s^\pm$ nächste Punkt auf $K \cap S(\varphi \pm \pi/2)$. Aus den Strecken s^+t^+, s^-t^- und dem zwischen t^+ und t^- liegenden Teil der Kurve K, der nicht die Gerade $S(\varphi)$ berührt, setzen wir die U-förmige Kurve U_φ zusammen, die K einschliesst. Sie hat die Länge

$$L(U_\varphi) = 2h_K(\varphi) + \int_{\varphi+\frac{1}{2}\pi}^{\varphi+\frac{3}{2}\pi} h_K(\alpha)\, d\alpha, \tag{3}$$

wie man am bequemsten einsieht, wenn man (2) auf die konvexe Kurve anwendet, die sich aus der Kurve U_φ und ihrem Spiegelbild am Punkt $z = (s^+ + s^-)/2$ zusammensetzt (zum Nachweis von (3) darf man etwa $z = 0$ annehmen, da beide Seiten von (3) nicht von der Wahl des Ursprungs abhängen). Nach (3) und (2) ist $L(U_\varphi) + L(U_{\varphi+\pi}) = 2h_K(\varphi) + 2h_K(\varphi+\pi) + L(K)$ und folglich

$$\int_0^{2\pi} L(U_\varphi)\, d\varphi = (2+\pi) L(K).$$

Für passendes φ ist daher $2\pi L(U_\varphi) \leqq (2+\pi) L(K)$, woraus die Ungleichung (1) folgt.

Gilt nun Gleichheit in (1), so muss insbesondere $L(U_\varphi)$ konstant sein. Aus (3) folgt dann durch Differenzieren (und wegen der Periodizität von h_K)

$$h_K'(\varphi) = \frac{1}{2}\left[h_K\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) - h_K\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

für alle φ. Es ist bekannt (Fejes Tóth [1], S. 37–38), dass hieraus

$$h_K(\varphi) = a_0 + a_1 \cos\varphi + b_1 \sin\varphi$$

mit Konstanten a_0, a_1, b_1 folgt; K ist also ein Kreis.

R. Schneider und J. A. Wieacker, Freiburg i. Br.

LITERATURVERZEICHNIS

1 L. Fejes Tóth: Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1953.
2 H. Joris: Le chasseur perdu dans la forêt (Un problème de géométrie plane). El. Math. *35*, 1–14 (1980).

 0013-6018/85/060098-02$1.50 + 0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 910. Die Polynomfolge $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$p_1(x) = x, \qquad p_{n+1}(x) = x(1-x)p_n'(x); \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Man ermittle für jedes $n \in \mathbf{N}$ die Menge der rationalen Nullstellen von p_n.

H. Müller, Hamburg, BRD

Solution: Let N_n be the set of all rational zeros of p_n. Then clearly $N_1 = \{0\}, N_n \supseteq \{0,1\}$ for all $n > 1$. By induction on n one easily shows that

(1) p_n is an integer polynomial of degree n with n simple real zeros in the interval $[0,1]$.
(2) $p_n(1-x) = (-1)^n p_n(x)$ for $n > 1$.
(3) $p_n(0) = 0$ and $p_n'(0) = 1$.

For the proof of (1) one uses the mean-value theorem. It follows from (2) that $\frac{1}{2} \in N_n$ for all odd $n > 1$. Consequently $\frac{1}{2} \notin N_{n+1}$ if n is odd, since all zeros of p_n are simple as mentioned in (1). Let q_n be defined by $q_n(x) = x^n p_n(1/x)$. Then q_n is a monic integer polynomial of