Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 40 (1985)
Heft: 4

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Kleine Mitteilungen

Einschliessung ebener Kurven

Von einer Kurve in der euklidischen Ebene sagen wir, dass sie die Menge K einschliesst, wenn K in der konvexen Hülle der Kurve enthalten ist. Für eine geschlossene, rektifizierbare Kurve K der Länge $L(K)$ bezeichne $L^*(K)$ das Infimum der Längen aller rektifizierbaren Kurven (zusammenhängend, aber nicht notwendig geschlossen), die K einschliessen. Wir zeigen die Ungleichung

$$L^*(K) \leqq \frac{2+\pi}{2\pi} L(K), \tag{1}$$

in der Gleichheit genau dann gilt, wenn K ein Kreis ist. Dass für Kreise Gleichheit gilt, hat Joris [2] gezeigt.

Da bei nichtkonvexen geschlossenen Kurven der Rand der konvexen Hülle stets kleinere Länge hat, dürfen wir uns zum Beweis der Ungleichung (1) auf konvexe Kurven K beschränken. Für eine solche Kurve ist durch $h_K(\varphi) = \operatorname{Max}\{\langle x, e_\varphi\rangle : x \in K\}$ die Stützfunktion h_K definiert; dabei ist in der Ebene ein kartesisches Koordinatensystem eingeführt, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnet das Skalarprodukt und e_φ den Einheitsvektor $(\cos\varphi, \sin\varphi)$. Bekanntlich gilt

$$L(K) = \int_0^{2\pi} h_K(\varphi)\, d\varphi. \tag{2}$$

$S(\varphi)$ sei die Stützgerade an K mit äusserem Normalenvektor e_φ. Für gegebenen Winkel φ sei $s^\pm$ der Schnittpunkt von $S(\varphi)$ mit $S(\varphi \pm \pi/2)$ und $t^\pm$ der zu $s^\pm$ nächste Punkt auf $K \cap S(\varphi \pm \pi/2)$. Aus den Strecken s^+t^+, s^-t^- und dem zwischen t^+ und t^- liegenden Teil der Kurve K, der nicht die Gerade $S(\varphi)$ berührt, setzen wir die U-förmige Kurve U_φ zusammen, die K einschliesst. Sie hat die Länge

$$L(U_\varphi) = 2h_K(\varphi) + \int_{\varphi+\frac{1}{2}\pi}^{\varphi+\frac{3}{2}\pi} h_K(\alpha)\, d\alpha, \tag{3}$$

wie man am bequemsten einsieht, wenn man (2) auf die konvexe Kurve anwendet, die sich aus der Kurve U_φ und ihrem Spiegelbild am Punkt $z = (s^+ + s^-)/2$ zusammensetzt (zum Nachweis von (3) darf man etwa $z = 0$ annehmen, da beide Seiten von (3) nicht von der Wahl des Ursprungs abhängen). Nach (3) und (2) ist $L(U_\varphi) + L(U_{\varphi+\pi}) = 2h_K(\varphi) + 2h_K(\varphi+\pi) + L(K)$ und folglich

$$\int_0^{2\pi} L(U_\varphi)\, d\varphi = (2+\pi) L(K).$$

Für passendes φ ist daher $2\pi L(U_\varphi) \leqq (2+\pi) L(K)$, woraus die Ungleichung (1) folgt.

Gilt nun Gleichheit in (1), so muss insbesondere $L(U_\varphi)$ konstant sein. Aus (3) folgt dann durch Differenzieren (und wegen der Periodizität von h_K)

$$h_K'(\varphi) = \frac{1}{2}\left[h_K\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) - h_K\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

für alle φ. Es ist bekannt (Fejes Tóth [1], S. 37–38), dass hieraus

$$h_K(\varphi) = a_0 + a_1 \cos\varphi + b_1 \sin\varphi$$

mit Konstanten a_0, a_1, b_1 folgt; K ist also ein Kreis.

R. Schneider und J. A. Wieacker, Freiburg i. Br.

LITERATURVERZEICHNIS

1 L. Fejes Tóth: Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1953.
2 H. Joris: Le chasseur perdu dans la forêt (Un problème de géométrie plane). El. Math. *35*, 1–14 (1980).

© 1985 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/85/060098-02$1.50 + 0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 910. Die Polynomfolge $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$p_1(x) = x, \qquad p_{n+1}(x) = x(1-x)p_n'(x); \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Man ermittle für jedes $n \in \mathbf{N}$ die Menge der rationalen Nullstellen von p_n.

H. Müller, Hamburg, BRD

Solution: Let N_n be the set of all rational zeros of p_n. Then clearly $N_1 = \{0\}, N_n \supseteq \{0,1\}$ for all $n > 1$. By induction on n one easily shows that

(1) p_n is an integer polynomial of degree n with n simple real zeros in the interval $[0,1]$.

(2) $p_n(1-x) = (-1)^n p_n(x)$ for $n > 1$.

(3) $p_n(0) = 0$ and $p_n'(0) = 1$.

For the proof of (1) one uses the mean-value theorem. It follows from (2) that $\frac{1}{2} \in N_n$ for all odd $n > 1$. Consequently $\frac{1}{2} \notin N_{n+1}$ if n is odd, since all zeros of p_n are simple as mentioned in (1). Let q_n be defined by $q_n(x) = x^n p_n(1/x)$. Then q_n is a monic integer polynomial of