

Zeitschrift:	Elemente der Mathematik
Herausgeber:	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band:	40 (1985)
Heft:	4
Artikel:	Ein elementarer und konstruktiver Beweis für die Zerlegungsgleichheit der Hill'schen Tetraeder mit einem Quader
Autor:	Schöbi, Philipp
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-38835

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Ein elementarer und konstruktiver Beweis für die Zerlegungsgleichheit der Hill'schen Tetraeder mit einem Quader

Als Antwort auf eine von D. Hilbert aufgeworfene Frage konnte M. Dehn im Jahre 1900 zeigen, dass sich nicht alle Tetraeder-Bereiche in einen prismatischen Bereich – oder, was auf dasselbe hinausläuft – in einen Quader-Bereich umbauen lassen. Es gibt Tetraeder-Bereiche, die nicht mit einem Quader zerlegungsgleich sind (vgl. [1–4]).

Bis heute sind nur wenige konkrete Tetraeder-Formen bekannt, die mit einem Quader zerlegungsgleich sind. Es sind dies zunächst die drei 1-parametrischen Tetraeder-Scharen von M.J.M. Hill [5] und daneben noch 27 isolierte Tetraeder-Bereiche, die in [4] vollständig aufgelistet sind. Die üblichen Beweisverfahren sind wohl konstruktiv, sie lassen aber für die praktische Durchführung eines Umbaus in einen Quader keine greifbaren Ansätze entnehmen. Abgesehen von einigen Spezialfällen fehlten jedenfalls bis anhin einfache Umbauverfahren mit einer überschaubaren Anzahl von Zerlegungskomponenten.

Mit der Vorstellung von drei einfachen generellen Konstruktionen für den Umbau der Hill'schen Tetraeder ist daher ein neuer Zugang zur Quader-Zerlegungsgleichheit dieser besondern Tetraedern freigelegt. Insbesondere ist darin auch ein direkter und elementarer Beweis für die Zerlegungsgleichheit der Hill'schen Tetraeder mit einem geraden Prisma enthalten, der mit höchstens 6 Zerlegungskomponenten auskommt.

In einem ersten Teil werden die Hill'schen Tetraeder aus einem geeigneten Polyeder gewonnen und einige später benötigte Zusammenhänge hergeleitet. Im zweiten Teil befassen wir uns dann mit der Konstruktion der Zerlegungen, die den Umbau in gerade prismatische Bereiche erlauben. Anschliessend werden in einem dritten Teil einige konkrete Beispiele behandelt. Insbesondere wird ein nicht auf Grenzprozessen beruhender Beweis für die Volumenformel $V = \frac{1}{3} G \cdot h$ bei den Hill'schen Tetraedern gegeben.

1. Die drei Hill'schen Tetraeder-Scharen

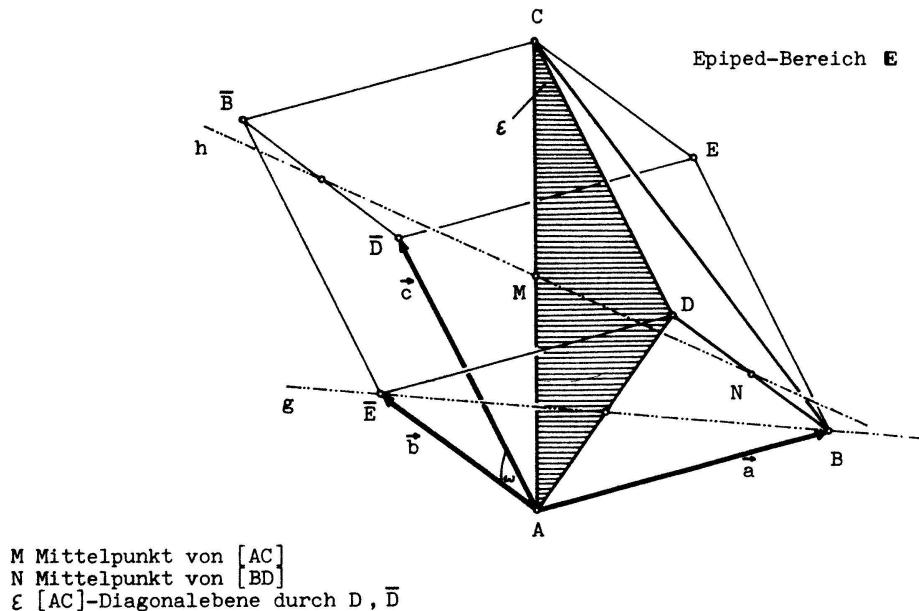
Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Hill'schen Tetraeder einzuführen. Für unsere Belange ist der ursprünglich von Hill gewählte Weg nicht geeignet. Wir stützen uns vielmehr auf eine Konstruktion, die von J.P. Sydler [6] erstmals verwendet wurde.

Ausgangsfigur zur Gewinnung der Hill'schen Tetraeder nach der Idee von Sydler ist ein *Parallel-Epiped-Bereich* \mathbf{E} , der von drei gleichlangen Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ mit gleichen Zwischenwinkeln ω aufgespannt wird (\mathbf{E} wird dann von sechs kongruenten Rhombenseitenflächen begrenzt; Figur 1.1).

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| =: s, \quad \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \measuredangle(\vec{b}, \vec{c}) = \measuredangle(\vec{c}, \vec{a}) =: \omega$$

Somit ist

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{a}) &= (\vec{b}, \vec{b}) = (\vec{c}, \vec{c}) = s^2 \\ (\vec{a}, \vec{b}) &= (\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}) = s^2 \cos \omega \end{aligned}$$



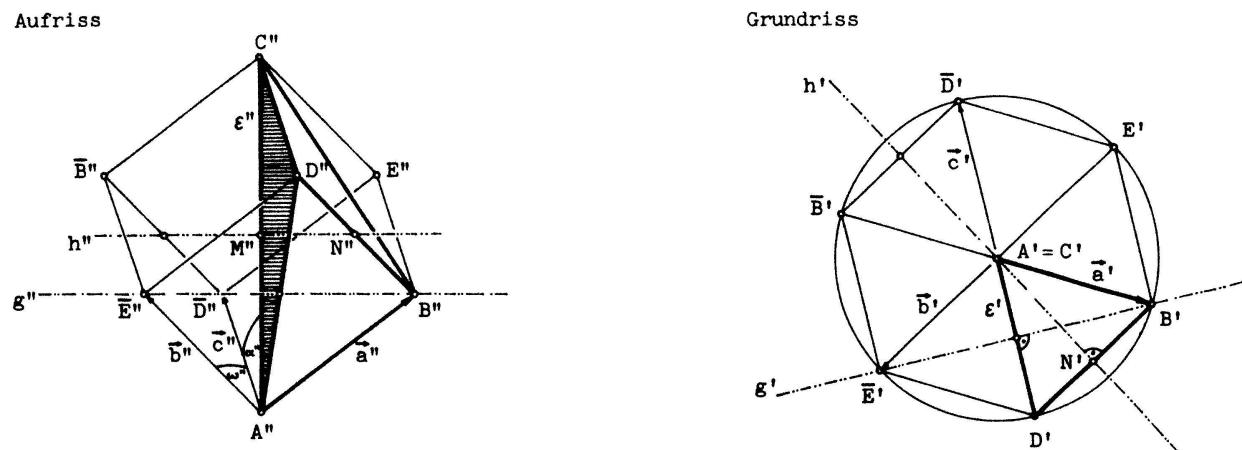
Figur 1.1

Die drei Punktpaare (B, \bar{B}) , (D, \bar{D}) , (E, \bar{E}) definieren mit der Körperdiagonalen $[AC]$ je eine Ebene. Diese drei Ebenen zerlegen den Epiped-Bereich E in 6 Tetraeder-Bereiche, von denen wir zeigen werden, dass sie untereinander kongruent sind.

In der Figur 1.1 ist einer der beiden Tetraeder-Bereiche herausgestellt, die von den Diagonalebenen durch die Punktpaare (B, \bar{B}) und (D, \bar{D}) begrenzt werden:

$$\mathbf{H}_1 := [ABCD].$$

Für die folgenden Überlegungen ist von Vorteil, wenn wir das *Prinzip der speziellen Ansicht* benutzen: Denken wir uns die Punkte B, \bar{D}, \bar{E} in einer Ebene parallel zum Grundriss (1. Hauptebene), so sieht unser Epiped-Bereich E in Grund- und Aufriss gemäss Figur 1.2 aus.



Figur 1.2

Der mit den Grundkenntnissen der *Darstellenden Geometrie* vertraute Leser kann daraus unter Zuhilfenahme von Symmetrieverlegungen sofort die folgenden, später benötigten Fakten entnehmen:

- (1) $g = \bar{B}\bar{E}$ steht senkrecht auf ε .
- (2) $h = MN$ schneidet AC und BD senkrecht (Minimaltransversale der beiden).
- (3) Die beiden Ebenen $B\bar{D}\bar{E}$ und $\bar{B}DE$ stehen senkrecht auf AC und zerlegen $[AC]$ in 3 gleiche Teile.
- (4) \vec{a}, \vec{b} , und \vec{c} schliessen zu \overrightarrow{AC} je denselben Winkel α ein ($\alpha = \alpha(\omega)$).

Diese Zusammenhänge lassen sich auch leicht *rechnerisch* bestätigen:

Man beachte, dass nach Voraussetzung über $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ gilt:

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{a}) &= (\vec{b}, \vec{b}) = (\vec{c}, \vec{c}) = s^2 \\ (\vec{a}, \vec{b}) &= (\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}) = s^2 \cos \omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad \overrightarrow{\bar{E}B} &= \vec{a} - \vec{b} && \text{Richtungsvektor von } g \\ \overrightarrow{AD} &= \vec{a} + \vec{b} && \text{Richtungsvektor von } AD \\ \overrightarrow{AC} &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} && \text{Richtungsvektor von } AC \\ (\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}) &= (\vec{a}, \vec{a}) - (\vec{b}, \vec{b}) && = 0 \Rightarrow g \perp AD \\ (\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) &= (\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} - \vec{b}, \vec{c}) && \\ &= 0 && + (\vec{a}, \vec{c}) - (\vec{b}, \vec{c}) = 0 \Rightarrow g \perp AC \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \Rightarrow g \perp \varepsilon \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \overrightarrow{AM} &= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \\ \overrightarrow{AN} &= \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \\ \vec{v} := \overrightarrow{NM} &= \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a}) && \text{Richtungsvektor von } h \\ \overrightarrow{BD} &= \vec{b} && \text{Richtungsvektor von } BD \\ (\vec{v}, \vec{b}) &= \frac{1}{2}(\vec{c}, \vec{b}) - \frac{1}{2}(\vec{a}, \vec{b}) && = 0 \Rightarrow h \perp BD \\ (\vec{v}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) &= (\vec{v}, \vec{b}) + \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a}, \vec{c} + \vec{a}) && \\ &= 0 + 0 && = 0 \Rightarrow h \perp AC \end{aligned}$$

$$(3) \quad \text{Ebene } B\bar{D}\bar{E}: \overrightarrow{\bar{E}B} = \vec{a} - \vec{b} \quad \text{Ebene } \bar{B}DE: \overrightarrow{\bar{B}E} = \vec{a} - \vec{b}$$

$$\overrightarrow{\bar{D}B} = \vec{a} - \vec{c} \quad \overrightarrow{\bar{B}D} = \vec{a} - \vec{c}$$

$(\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0$ haben wir schon unter (1) gezeigt;
 $(\vec{a} - \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0$ folgt analog.

Für die Länge des Vektors \overrightarrow{AC} gilt zudem:

$$|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c})} = \sqrt{3s^2 \cdot (1 + 2 \cos \omega)}$$

und für die Länge der Projektion von \vec{a} auf \overrightarrow{AC} :

$$\frac{|(\vec{a}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c})|}{|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|} = \frac{|s^2 \cdot (1 + 2 \cos \omega)|}{\sqrt{3s^2 \cdot (1 + 2 \cos \omega)}} = \frac{\sqrt{3s^2 \cdot (1 + 2 \cos \omega)}}{3}$$

und daraus folgt, dass unsere beiden Ebenen den Vektor \overrightarrow{AC} *dritteln*.

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \frac{(\vec{a}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|} &= \frac{(\vec{b}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c})}{|\vec{b}| \cdot |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|} = \frac{(\vec{c}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c})}{|\vec{c}| \cdot |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|} \\
 &= \frac{s^2 + 2s^2 \cos \omega}{s \sqrt{3s^2 \cdot (1 + 2 \cos \omega)}} = \frac{s^2 \cdot (1 + 2 \cos \omega)}{s^2 \sqrt{3(1 + 2 \cos \omega)}} \\
 &= \sqrt{\frac{1 + 2 \cos \omega}{3}} =: \cos \alpha(\omega); \\
 \text{umgekehrt erhalten wir } \cos \omega(\alpha) &= \frac{3 \cos^2 \alpha - 1}{2}.
 \end{aligned}$$

Aus (1) folgt unmittelbar, dass B vermöge der Spiegelung σ_ϵ in \bar{E} übergeht. Daraus folgt:

$$[ACD\bar{E}] = ([ACDB])\sigma_\epsilon.$$

Die beiden benachbarten Tetraeder-Bereiche $[ACD\bar{E}]$ und $[ACDB]$ gehen also durch eine ungleichsinnige *Kongruenztransformation* auseinander hervor.

Da die Wahl dieser beiden Nachbarn willkürlich erfolgte, dürfen wir aus Symmetriegründen auf die ungleichsinnige Kongruenz je zweier solcher benachbarter Tetraeder-Bereiche im E schliessen; womit die – gleichsinnige oder ungleichsinnige – *Kongruenz aller sechs in unserem Epiped-Bereich E liegenden Tetraeder-Bereiche* feststeht. Aus dem Epiped E ist damit eine wohldefinierte Tetraeder-Form abgeleitet.

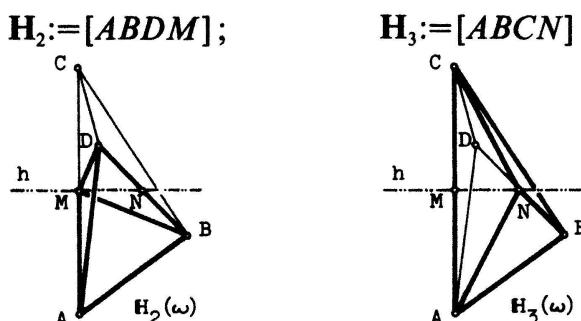
Dieses Ergebnis ist gewährleistet für alle Winkel ω im Intervall $0 < \omega < \frac{2}{3}\pi$ (für $\omega = \frac{2}{3}\pi$ liegen die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ in einer Ebene). Damit ist eine erste *1-parametrische Schar von Tetraeder-Formen* festgelegt. Man nennt sie die *Hill'schen Tetraeder 1. Art*.

Aus dem Epiped-Bereich $E(\omega)$ lassen sich gleich auch noch die beiden andern 1-parametrischen Scharen von Hill'schen Tetraedern gewinnen. Da nach (2) die Strecken $[AC]$ und $[BD]$ auf h senkrecht stehen und da M und N die Mittelpunkte dieser Strecken sind, ist $[ABDM]$ das Bild von $[CDBM]$ und $[ABCN]$ das Bild von $[CDAN]$ bei der Spiegelung an der Geraden g (Drehung mit der Achse g um den Winkel π). Es ist also

$$[ABDM] = ([CDBM])\sigma_h \quad \text{und} \quad [ABCN] = ([CDAN])\sigma_h.$$

Damit stehen zwei Paare von gleichsinnig kongruenten Tetraedern fest, die – jeweils zusammengefügt – gerade den Bereich H_1 ergeben. Diese Symmetrie-Eigenschaft bezüglich h wird uns später sehr zustatten kommen.

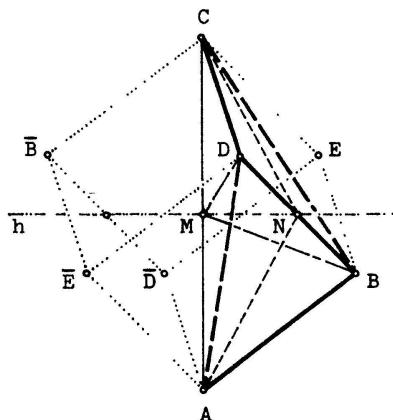
Wir setzen nun (vgl. Figur 1.3):



Figur 1.3

Die Bereiche $H_2(\omega)$ werden *Hill'sche Tetraeder 2. Art*, die Bereiche $H_3(\omega)$ *Hill'sche Tetraeder 3. Art* genannt.

In der Figur 1.4 sind die drei Tetraeder begrenzenden Linien im Ausgangs-Epiped $E(\omega)$ eingetragen. In gleicher Weise gezeichnete Linien sind *gleich lang* (wie sich leicht aus der Definition und an Hand der Symmetrie-Eigenschaften bezüglich h bestätigen lässt).

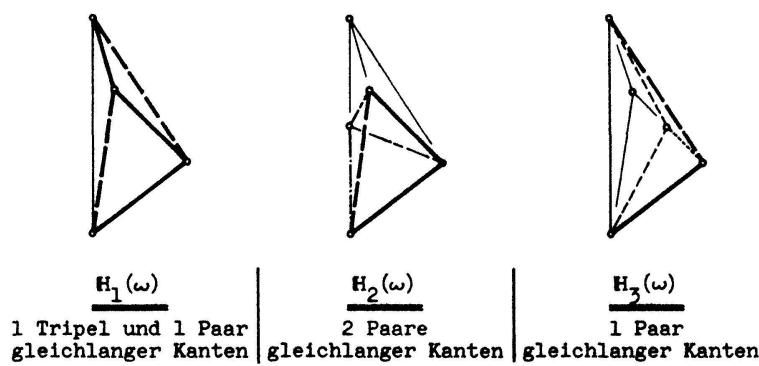


Figur 1.4

Die verschiedenen Linien-Typen haben folgende Bedeutung:

- Kanten von E
- - - Flächendiagonale von E (gleichlange)
- Hauptdiagonale von E
- - - } Strecken, die durch σ_h paarweise ineinander übergehen

Hieraus erscheint auch die (hier unbewiesene) Tatsache plausibel, dass die drei Hill'schen Tetraeder-Klassen bis auf wenige Spezialfälle disjunkt sind (Figur 1.5).



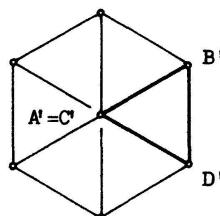
Figur 1.5

2. Die konkreten Zerlegungen

Dank den bereits festgestellten inneren Symmetrien der Hill'schen Tetraeder sowie der symmetriegestützten Zusammenhänge zwischen $H_1(\omega), H_2(\omega), H_3(\omega)$ bei gemeinsamem

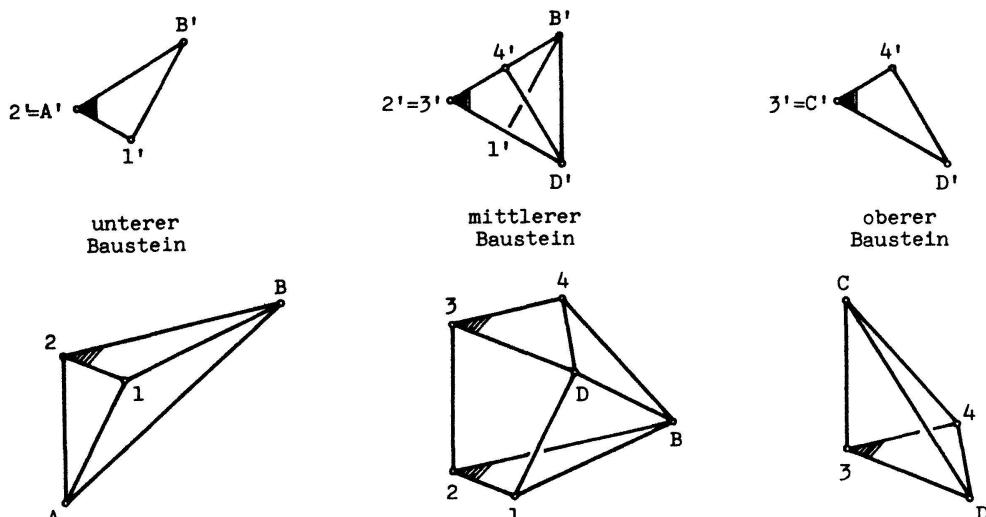
ω werden wir die nachstehend angeführten Zerlegungen leicht und allein an Hand von Symmetrievergleichungen begründen können.

Es sei $H_1 = [ABCD]$ ein Hill'scher Tetraeder-Bereich 1. Art, wie definiert. A, B, C, D sind dann bekanntlich vier Eckpunkte von E , die bei geeigneter Betrachtung (AC 1.-projizierend) gemäss Figur 2.1 erscheinen.



Figur 2.1

Fällt man nun von den Eckpunkten B und D aus je eine Orthogonalebene auf die ausgezeichnete Kante $[AC]$, so wird $[AC]$ gedrittelt (vgl. (3)), und H_1 zerfällt in 3 Bausteine der in Figur 2.2 (Grundriss- und Schrägriss-Ansicht) dargestellten Art.



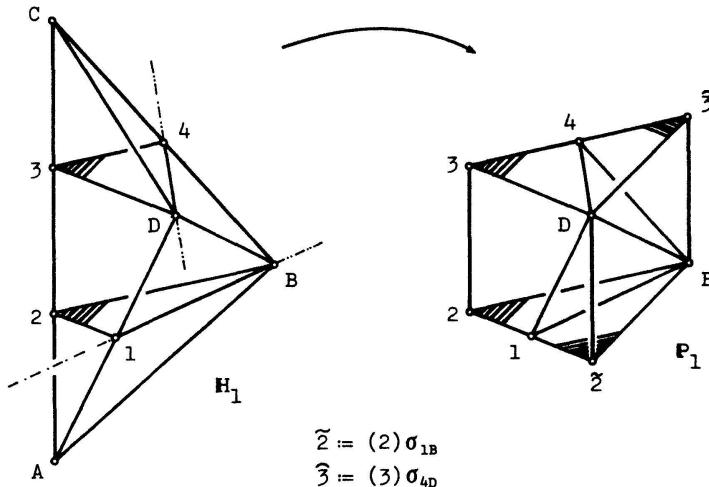
Figur 2.2

Es gilt nun zu beachten: Durch Spiegelung an der Geraden $1B$ (d. h. durch die Punkte 1 und B) geht

- A über in D und damit das Dreieck $[1BA]$ in das Dreieck $[1BD]$; denn es ist $1B = \bar{E}B = g$ (vgl. Figur 1.2), und die Seitenfläche $ABD\bar{E}$ von E ist ein Rhombus.
- Die Kante $[2A]$ des unteren Bausteins über in eine zur Ebene $1B2$ orthogonale Kante; denn $[2A]$ steht orthogonal zu $1B2$, und die Ebene geht in sich über.

Völlig analoge Überlegungen lassen sich bezüglich der Spiegelung des oberen Bausteins an seiner Kantengerade $4D$ anstellen. Man berücksichtige nämlich nur, dass $h = MN$ Symmetriechse in $[ABCD]$ ist, wobei $[1B]$ und $[4D]$ bei dieser Symmetrie korrespondieren (vgl. (2) und Figur (1.2)).

Da im Raum die Spiegelung an einer Geraden s einer Umklappung an s um den Winkel π gleichkommt, steht somit fest: Durch Umklappen des unteren Bausteins um $1B$ und des oberen Bausteins um $4D$ gelangt man zu einem *geraden prismatischen Bereich P_1 über einem gleichseitigen Dreieck* (Figur 2.3).



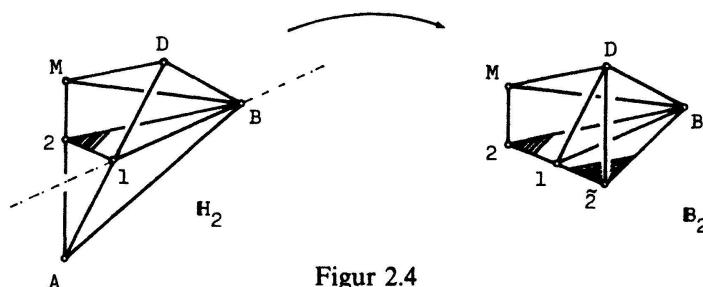
Figur 2.3

Damit ist aber auch schon die *Quader-Zerlegungsgleichheit der Hill'schen Tetraeder-Bereiche 1. Art konstruktiv erwiesen* (denn P_1 lässt sich leicht in einen Quader-Bereich umbauen¹⁾), und die Zerlegungsgleichheit ist transitiv).

Der Umbau von H_1 in einen geraden prismatischen Bereich P_1 über einem gleichseitigen Dreieck lässt sich mit nur 3 Bauteilen realisieren. Letztere erhält man, indem man die ausgezeichnete Kante $[AC]$ drittelt und in den beiden mittleren Teipunkten zu AC normale Trenn-Ebenen errichtet. – Zum Umbau sind 2 Umklappungen σ_{1B} und σ_{4D} vonnöten.

Für das Weitere sei nochmals hervorgehoben, dass die beiden eben benützten Umbau-Operationen (Umklappungen) bezüglich der Symmetriechse $h = MN$ von H_1 symmetrisch liegen.

Wir wollen jetzt abklären, was der Umbau von $[ABCD]$ auf seinem Teil-Tetraeder-Bereich $H_2 = [ABDM]$ induziert (Figur 2.4).



Figur 2.4

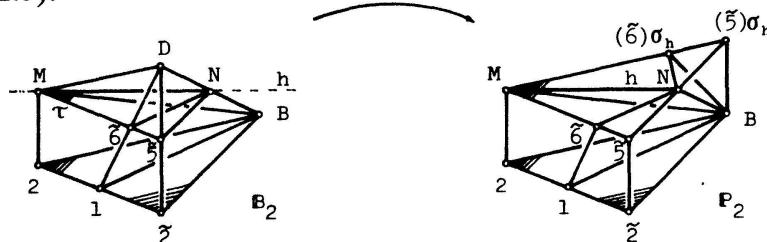
¹⁾ Bauen wir nämlich die dreieckige Grundfläche von P_1 um in einen Rechteck-Bereich, so induziert dies für die über den einzelnen Umbau-Komponenten liegenden geraden prismatischen Bausteine gerade den Umbau von P_1 in einen Quader-Bereich.

Es gilt nun folgendes zu beachten: Die beiden einander zu $[ABCD]$ ergänzenden Bereiche $[ABDM]$ und $[CBDM]$ gehen, wie bereits gezeigt, durch eine Spiegelung an $h = MN$ auseinander hervor; aber auch sämtliche hinsichtlich $[ABCD]$ an diesen beiden Teil-Bereichen vorgenommenen Umbau-Operationen verlaufen spiegelsymmetrisch bezüglich h (vgl. dazu (2)).

Daraus können wir schliessen: Ist τ die Mittel-Parallelebene von Grund- und Deckfläche des vorher aus $[ABCD]$ erhaltenen geraden prismatischen Bereiches P_1 (d. h. eine weitere Normalebene zu AC in M), so wird der oberhalb τ liegende Teil des nun erhaltenen Bereiches B_2 durch eine Spiegelung an h in einen Baustein übergeführt, der den unterhalb τ liegenden Teil von B_2 zu einem geraden prismatischen Bereich P_2 mit gleicher Grundfläche und halber Höhe wie P_1 ergänzt. Formal lässt sich dieser Sachverhalt mit der Gleichung $\sigma_h = \sigma_{1B} \cdot \sigma_h \cdot \sigma_{4D}$ begründen, die sich aus

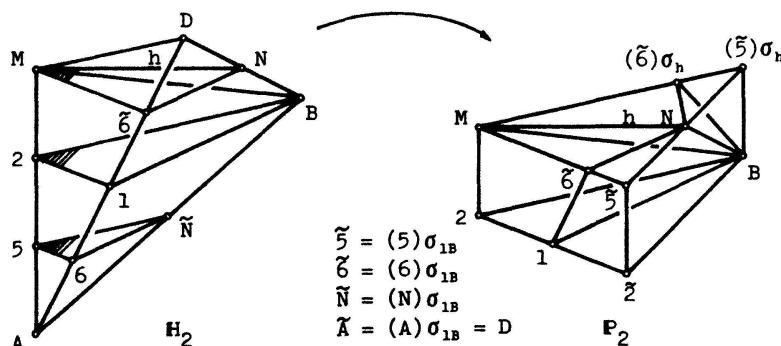
$$\sigma_{1B} = \sigma_{(4D)\sigma_h} = \sigma_h \cdot \sigma_{4D} \cdot \sigma_h$$

ergibt (Figur 2.5).



Figur 2.5

Die eben in zwei Schritten erhaltenen Bausteine können sehr einfach auch direkt aus $[ABDM]$ gewonnen werden (Figur 2.6).

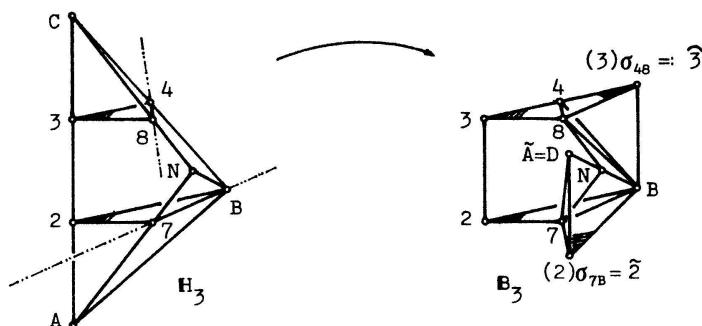


Figur 2.6

Damit ist auch die *Quader-Zerlegungsgleichheit der Hill'schen Tetraeder-Bereiche 2. Art konstruktiv erwiesen*.

Der Umbau von H_2 in einen geraden prismatischen Bereich P_2 über einem gleichseitigen Dreieck lässt sich mit nur 4 Bauteilen realisieren. Letztere erhält man, indem man die ausgezeichnete Kante $[AM]$ (die Hälfte von $[AC]$) drittelt und in den beiden mittleren Teipunkten und M zu AM normale Trenn-Ebenen errichtet. Zum Umbau sind 2 nacheinander geschaltete Umklappungen σ_{1B} und σ_h erforderlich.

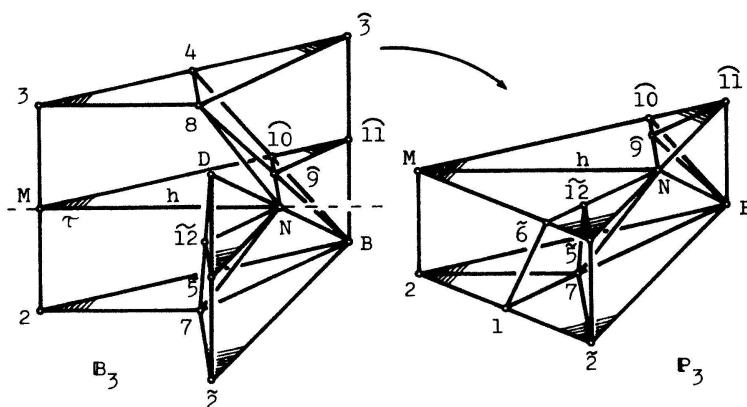
Analog verfolgen wir nun, was der Umbau von $[ABCD]$ auf seinem Teil-Tetraeder-Bereich $\mathbf{H}_3 = [ABCN]$ induziert (Figur 2.7).



Figur 2.7

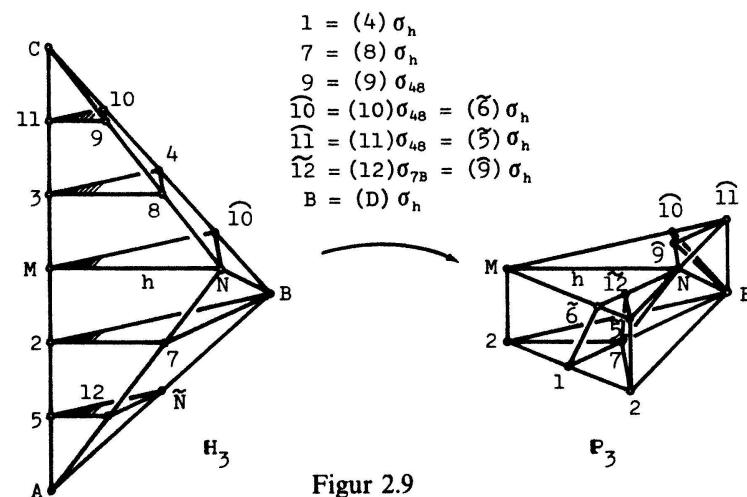
Da auch die beiden einander zu $[ABCD]$ ergänzenden Bereiche $[ABCN]$ und $[ADCN]$ durch eine Spiegelung an $h = MN$ auseinander hervorgehen, können wir für das weitere Vorgehen genau gleich wie bei \mathbf{H}_2 argumentieren:

Mittels der schon vorher verwendeten Trenn-Ebene τ kann \mathbf{B}_3 durch eine Umklappung um h in einen zu \mathbf{P} , kongruenten prismatischen Bereich übergeführt werden (Figur 2.8).



Figur 2.8

Auch hier können die in zwei Schritten erhaltenen Bausteine direkt aus dem Ausgangsbereich [ABCN] gewonnen werden (Figur 2.9).



Figur 2.9

Es ist also auch die *Quader-Zerlegungsgleichheit der Hill'schen Tetraeder-Bereiche 3. Art erwiesen.*

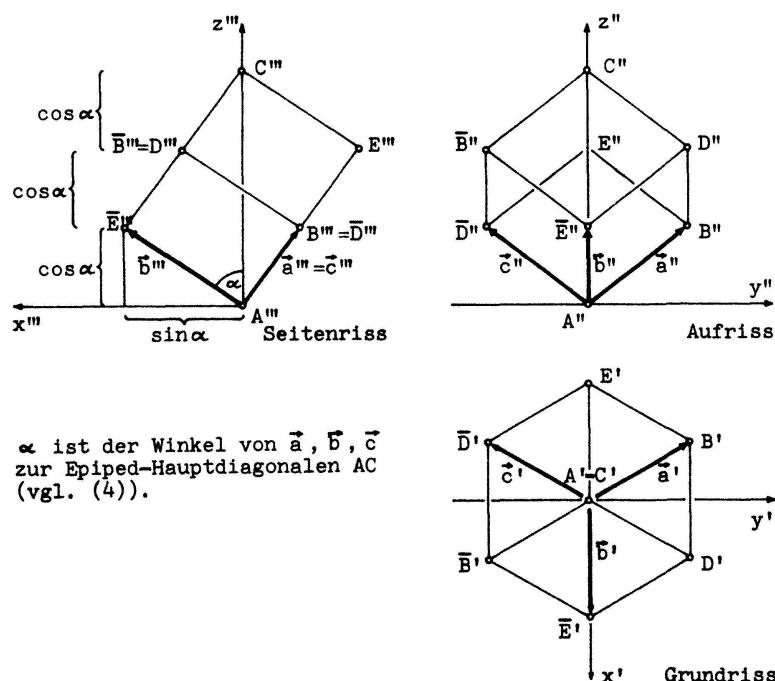
Der Umbau von H_3 in einen geraden prismatischen Bereich P_3 über einem gleichseitigen Dreieck lässt sich mit nur 6 Bausteinen realisieren. Letztere erhält man, indem man die ausgezeichnete Kante $[AC]$ in sechs gleiche Teile teilt und in den fünf Zwischen-Punkten zu AC normale Trenn-Ebenen errichtet. – Zum Umbau sind 3 nacheinander geschaltete Umklappungen σ_{7B} , σ_{48} und σ_h erforderlich.

Bemerkung: Auf diese Zerlegungen der Hill'schen Tetraeder-Bereiche ist der Autor gestossen, als er erst einmal den von Sydler [7] zu ihrer Konstruktion benutzten *Epiped-Bereich E* geeignet in einen geraden prismatischen Bereich umzubauen versuchte. Er hoffte dabei, mit Hilfe der auf den sechs kongruenten Teil-Tetraeder-Bereichen H_1 von E induzierten Zerlegungs-Bausteinen einen *einzelnen Teil-Tetraeder-Bereich* in einen prismatischen umbauen zu können.

3. Beispiele

Für die drei unendlichen Klassen von Tetraeder-Bereichen $H_1(\omega)$, $H_2(\omega)$, $H_3(\omega)$ kann nun die Volumenformel $V = G \cdot h/3$ für alle möglichen Grundflächen und ihre entsprechenden Höhen *auf der Basis der Zerlegungsgleichheit* (d. h. ohne Grenzprozesse) hergeleitet werden.

Wird allgemein ein Tetraeder-Bereich durch drei von einer Ecke ausgehende Vektoren $\vec{d}, \vec{e}, \vec{f}$ aufgespannt, so findet sich die Grösse $G \cdot h$ stets als halbes Spatprodukt $\frac{1}{2}[\vec{d}, \vec{e}, \vec{f}]$, gleich welche der vier Tetraeder-Flächen man als Grundfläche G betrachtet (dies ergibt sich unmittelbar aus der geometrischen Deutung des Spatproduktes). Folglich muss die Gültigkeit der Formel $V = G \cdot h/3$ nur für *eine* Grundfläche und die entsprechende Höhe nachgewiesen werden. Dazu denken wir uns den Epiped-Bereich E gemäss Figur 3.1 in ein kartesisches Koordinaten-System gestellt. Zugleich wählen wir die Einheit so,



Figur 3.1

dass $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ wird. Überdies benutzen wir hier vorteilhafterweise den Winkel α als Scharparameter, der beim Beweis von (4) eingeführt wurde.

Für die Grundfläche des Ziel-Prisma-Bereiches erhalten wir dann in allen Fällen:

$$F_{AA'B'D'} = \frac{\sqrt{3}}{4} \|A'B'\|^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \|A'E'\|^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \sin^2 \alpha ;$$

und für dessen Höhe haben wir im Falle

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1: \quad h_1 &= \cos \alpha, \\ \mathbf{H}_2: \quad h_2 &= h_3 = \frac{1}{2} \cos \alpha. \end{aligned}$$

Für die entsprechenden Volumina ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} V_{\mathbf{H}_1(\alpha)} &= \frac{\sqrt{3}}{4} \sin^2 \alpha \cos \alpha, \\ V_{\mathbf{H}_2(\alpha)} &= V_{\mathbf{H}_3(\alpha)} = \frac{\sqrt{3}}{8} \sin^2 \alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

H₁: Grundfläche ABC

Aus der Figur 3.1 liest man ab

$$G = F_{ABC} = \frac{1}{2} \|AC\| \cdot \|A'B'\| = \frac{1}{2} 3 \cos \alpha \sin \alpha ;$$

und aus dem Grundriss dieser Figur entnimmt man für die entsprechende Höhe

$$h = \frac{1}{2} \|D'E'\| = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha$$

so dass

$$\frac{G \cdot h}{3} = \frac{3 \cos \alpha \sin \alpha \sqrt{3} \sin \alpha}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{4} \sin^2 \alpha \cos \alpha$$

H₂: Grundfläche ABM

Da hier die Grundfläche gegenüber H₁ halbiert ist und die Höhe dieselbe bleibt, halbiert sich insgesamt der Wert des Volumens.

H₃: Grundfläche ABC

Hier ist die Grundfläche gegenüber H₁ dieselbe geblieben. Da die Höhe nur halb so gross ist, wie in H₁, ist das Volumen auch die Hälfte des Volumens von H₁.

Damit ist die Volumenformel $V = G \cdot h / 3$ für alle Hill'schen Tetraeder-Bereiche allein mit Überlegungen aus der Theorie der Zerlegungsgleichheit hergeleitet.

Als letztes sollen nun noch für die drei Tetraeder-Klassen die Bausteine in Abhängigkeit des Scharparameters ω berechnet werden. Dazu normieren wir die allen Scharen gemeinsame Kante [AB] auf $\|[AB]\| := 1$.

Die nachfolgend angeführten Streckenverhältnisse, Symmetrien und Winkel lassen sich direkt aus den Zerlegungs-Figuren zu den drei Tetraeder-Klassen herauslesen.

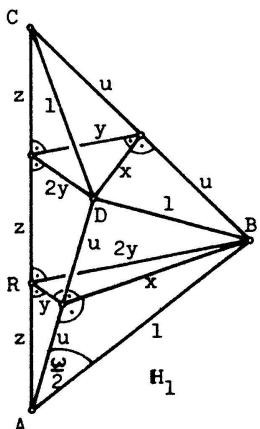
Hill'sche Tetraeder 1. Art (Figur 3.2)

Die eingetragenen Werte bezeichnen die Längen der betreffenden Streckenteile.

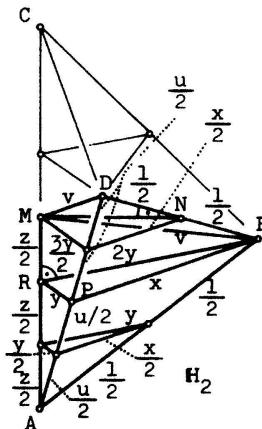
Der Kantenwinkel an AC beträgt bei allen drei Bausteinen $\frac{\pi}{3}$. Weiter ergibt sich der Reihe nach:

$$x = \sin \frac{\omega}{2}; \quad u = \sqrt{1 - x^2};$$

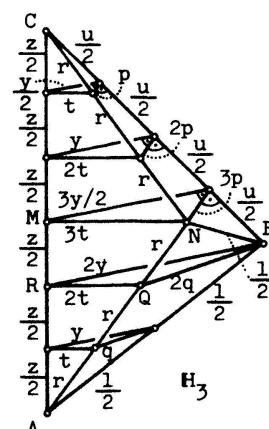
Aus $(2y)^2 = y^2 + x^2$ folgt $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ und damit $z = \sqrt{u^2 - y^2} = \sqrt{1 - \frac{4}{3}x^2}$.



Figur 3.2



Figur 3.3



Figur 3.4

Hill'sche Tetraeder 2. Art (Figur 3.3)

Der Kantenwinkel an AC beträgt auch hier $\frac{\pi}{3}$. Die Streckenlängen x, u, y, z sind dieselben wie vorher.

Zur Berechnung bleiben nur noch (beachte $\triangle MRB$):

$$v = \sqrt{(2y)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4x^2}$$

$$3t := \|MN\| = \sqrt{v^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + x^2 - \frac{1}{4}} = x.$$

Hill'sche Tetraeder 3. Art (Figur 3.4)

Der Kantenwinkel an AC beträgt hier $\frac{\pi}{6}$. Auch hier treten wiederum die früheren Strecken x, u, y, z auf.

Aus dem Vergleich mit H_1 ergibt sich:

$$3p = \frac{x}{2} \Rightarrow p = \frac{x}{6}$$

Weiter folgt:

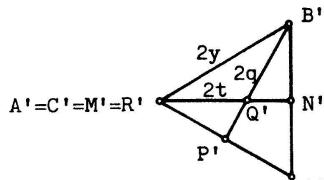
$$r = \sqrt{p^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{36} + \frac{1-x^2}{4}} = \frac{1}{6} \sqrt{9 - 8x^2}.$$

Aus der Figur 3.5 kann schliesslich auch noch der Wert von q entnommen werden:

$$2q = 2t.$$

Wegen $3t = x$ ist somit

$$q = t = \frac{x}{3}.$$



Figur 3.5

Anschliessend sind noch für drei verschiedene Werte von ω die Längen der Baustein-Kanten tabellarisch zusammengestellt; diese Daten erlauben die Herstellung entsprechender Modelle.

	x	u	y	z	v	p	r	$t = q$
$\omega = \frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{6\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}}{6}$	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$
$\omega = \frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{\sqrt{7}}{6}$	$\frac{1}{6}$
$\omega = 2\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}$	$\frac{1}{6\sqrt{3}}$	$\frac{1}{6}\sqrt{\frac{19}{3}}$	$\frac{1}{3\sqrt{3}}$

Philipp Schöbi, Mathematik-Departement, ETH Zürich

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 M. Dehn: Über raumgleiche Polyeder. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse, p. 345–354 (1900).
- 2 M. Dehn: Über den Rauminhalt. Math. Ann. 55, p. 465–478 (1902).
- 3 V.G. Boltjanski: Zerlegungsgleichheit von Vielecken und Vielflächen. Enzyklopädie der Elementarmathematik, Bd. V, p. 132–170, Berlin 1971.
- 4 V.G. Boltjanski: Hilbert's Third Problem. New York, Toronto, London, Sydney 1978.
- 5 M.J.M. Hill: Determination of the Volumes of Certain Species of Tetrahedra Without Employment of the Method of Limits. Proc. London Math. Soc. 27, p. 39–52 (1896).
- 6 J.P. Sydler: Sur la décomposition des polyèdres. Comm. Math. Helv. 16, p. 266–273 (1943).