

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 40 (1985)
Heft: 3

Artikel: Die 5 Typen der projektiven Abbildungen der Geraden auf sich und die 10 Typen der projektiven Abbildungen der Ebene auf sich
Autor: Heesch, H.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-38831>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 10.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

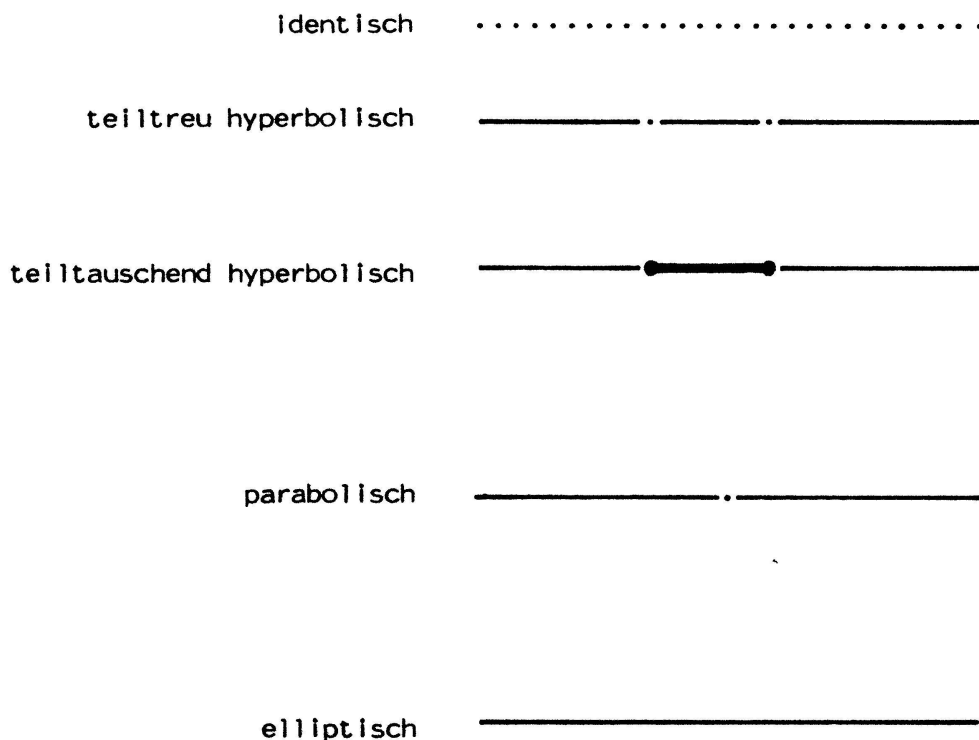
Die 5 Typen der projektiven Abbildungen der Geraden auf sich und die 10 Typen der projektiven Abbildungen der Ebene auf sich

Bekanntlich ist eine projektive Abbildung einer Geraden auf sich durch drei Punkte und deren Bilder bestimmt, eine projektive Abbildung der Ebene auf sich durch 4 Punkte in allgemeiner Lage und deren Bilder (siehe z. B. Enzyklopädie der Elementarmathematik IV, Geometrie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1969, oder H. S. M. Coxeter, Projective Geometry, 1964, Waltham, Massachusetts, London, Toronto). H. S. M. Coxeter hat in seinem Buch *The Real Projective Plane*, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1. Auflage 1949, deutsch von W. Burau, Reelle projektive Geometrie der Ebene, München 1955 – ich zitiere aus diesem Übersetzungswerk –, auf Seite 47 die Tafel der 5 Klassen der Gruppe der linearen Abbildungen der projektiven Geraden auf sich angegeben. Im folgenden ist in Tafel 1 eine Veranschaulichung dieser 5 Klassen (der linearen Abbildungen des eindimensionalen projektiven Raumes auf sich) gegeben; auf der Geraden, die dabei jedesmal einen eindimensionalen projektiven Punktraum repräsentiert, sind Fixpunkte durch das übliche Punktsymbol dargestellt. Es gibt dabei genau die 5 verschiedenen Fälle:

1. Sämtliche Punkte sind Fixpunkte.
2. Es gibt genau 2 Fixpunkte; dieser Fall spaltet in die beiden Unterfälle auf,

Tafel 1

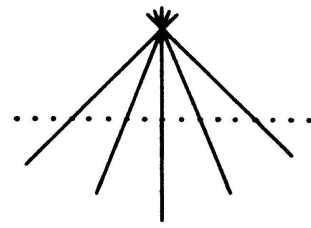
DIE 5 TYPEN DER PROJEKTIVITÄTEN AUF EINER GERADEN (COXETER)



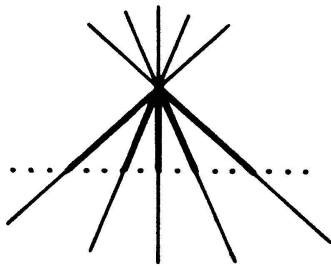
DIE 10 TYPEN EBENER KOLLINEATIONEN

Tafel 2

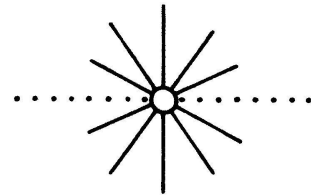
E



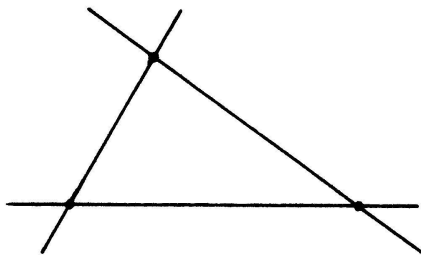
Treuhomologie



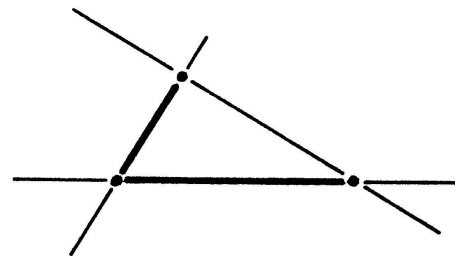
Tauschhomologie



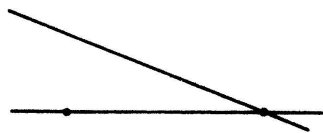
Elation



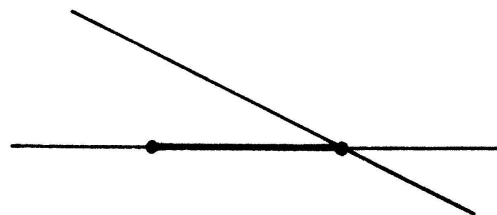
Treuterlation



Tauschterlation



Treubilation



Tauschbilation



Delation



Adlation

- 2a. dass die beiden durch das Fixpunktpaar definierten Teilgeraden je auf sich,
 2b. aufeinander, das ist: vertauscht, abgebildet sind.
 3. Es gibt genau einen Fixpunkt.
 4. Es gibt keinen Fixpunkt.

Für die Herleitung einer Antwort auf die gleiche Frage für die Dimension 2, d. h., für die projektive Ebene (mit ihren 10 Typen der zweidimensionalen projektiven Abbildungen), kann daher die Methode des Durchspiels der Möglichkeiten von *Paaren* dieser 5 Fälle zur Dimensionszahl 1 gewählt werden.

Dies geschieht im folgenden: Ausgangspunkt ist die Tafel 1 unter Verwendung auch der fünf Bezeichnungen 1., 2a., 2b., 3., 4. für die fünf eindimensionalen Abbildungstypen 1. der Identität, der 2a. teiltreuen oder aber 2b. teiltauschenden hyperbolischen Projektivität mit 2 Fixpunkten oder 3. der parabolischen (mit einem Fixpunkt) oder schliesslich 4. der elliptischen, fixpunktfreien Projektivität.

Für den ersten Fall auf Tafel 2 gibt es zwei verschiedene punktweis fixe Geraden. Typ Nr. 1 der ebenen Abbildungen: (zweidimensionale) Identität *E*.

Ausser den sämtlichen Punkten einer Geraden (der eindimensionalen Identität) gibt es einen nicht auf ihr liegenden Fixpunkt *F*. Hierbei ist zu unterscheiden, ob die zwei Fixpunkte auf einer jeden Geraden des Büschels mit *F* als Büschelträger a) jeden der beiden durch sie definierten Geradenteile in sich (Treuhomologie) oder b) permutiert (Tauschhomologie) abbilden. Typen 2 und 3 der ebenen Abbildungen.

Ein weiterer Fall ergibt sich, wenn der Trägerpunkt des Büschels auf der punktweis fixen Geraden liegt: Typ Nr. 4, Elation.

Die Anzahl der Typen der zweidimensionalen projektiven Abbildungen mit wenigstens einer punktweis fixen Geraden ist also 4.

Im folgenden gibt es mithin nur endlich viele Fixpunkte, und, wie schon (aus der Ungeradheit der Ordnung 3 der Gleichung für die Fixpunkte ersichtlich) bemerkt, 3, 2 oder einen Fixpunkt (Tafel 2).

Bei genau 3 (selbstverständlich nichtkollinearen) Fixpunkten gibt es das Paar der Terlationen; bei der Treu-Terlation wird jeder durch 2 Fixpunkte definierte Teil einer der 3 Fixgeraden auf sich abgebildet; bei der Tauschterlation permutieren in 2 der 3 Fixgeraden die Teile.

Es gibt – wie schon erörtert – keine lineare Abbildung der projektiven Ebene auf sich mit genau zwei Fixgeraden und 0 Fixpunkten. Hingegen gibt es das Paar projektiver Abbildungsklassen mit genau 2 Fixpunkten, sowohl mit Erhalt der beiden durch die Fixpunkte definierten Teile der einen Fixgeraden wie mit dem Tausch der Teile (Trebilation bzw. Tauschbilation).

Schliesslich gibt es die linearen Abbildungen der projektiven Ebene auf sich mit genau einem Fixpunkt und genau einer Fixgeraden. Es sind die beiden Fälle zu unterscheiden: Der Fixpunkt liegt ausserhalb der Fixgeraden (Delation), oder der Fixpunkt liegt auf der Fixgeraden (Adlation).

H. Heesch, Institut für Mathematik, Universität, Hannover