Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 40 (1985)
Heft: 2

Rubrik: Aufgaben

Aufgaben

Aufgabe 906. Es seien $a \neq 1$ und n natürliche Zahlen, ferner p eine Primzahl mit $p \nmid a$. Man bestimme den genauen Exponenten $\varepsilon = \varepsilon(a,n,p)$, mit welchem p in dem Produkt

$$P_n(a) := \prod_{i=1}^{n} (a^i - 1)$$

auftritt.

H. Bergmann, Hamburg, BRD

Lösung: Für $m \in \mathbf{N}$ sei $v_p(m)$ der genaue Exponent, mit dem p in m aufgeht; weiter sei $e_p(x) := \sum_{k \geq 1} [xp^{-k}]$ für $x \in \mathbf{R}_+$ gesetzt. Ist nun w die Ordnung von a modulo p und $v := v_p(a^w - 1)$, so wird mit gewissen $u_k \in \mathbf{N}$, $p \nmid u_k$ leicht durch Induktion nach k bewiesen

$$a^{wp^k} = 1 + u_k p^{v+k} \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbf{N}_0, \tag{1}$$

falls nicht gleichzeitig $p = 2$ und $v = 1$ gilt. (Im Falle $p = 2$ muss man dabei $2v + 2k > v + k + 1$ für alle $k \geq 0$ sichern, was $v \geq 2$ benötigt.)
Klar ist, dass $p \mid (a^i - 1)$ genau für $w \mid i$ gilt. Schreibt man daher jedes solche i in eindeutiger Weise als $i = wp^k j$ mit $k \in \mathbf{N}_0, j \in \mathbf{N}, p \nmid j$, so folgt aus

$$a^i - 1 = (a^{wp^k} - 1) \sum_{l=0}^{j-1} a^{wp^k l} \quad \textit{wegen} \quad \sum_{1} \ldots \equiv j \not\equiv 0 \pmod{p} \tag{2}$$

und wegen (1) die Richtigkeit von $v_p(a^i - 1) = v_p(a^{wp^k} - 1) = v + k$.
Daher hat man ausser in dem bei (1) ausgeschlossenen Fall

$$\varepsilon(a,n,p) = v_p(P_n(a)) = \sum_{k \geq 0} (v + k) \left(\left[\frac{n}{wp^k} \right] - \left[\frac{n}{wp^{k+1}} \right] \right) = v[n/w] + e_p(n/w),$$

wobei man $w = 1$ für $p = 2$ beachte.
In dem verbleibenden Fall $p = 2$, $a \not\equiv 1 \pmod 4$ setzt man $z := v_2(a + 1)$ und hat $z \geq 2$. Bei $2 \nmid i$ ist $a^{i-1} + \ldots + 1 \equiv i \not\equiv 0 \pmod 2$, also $v_2(a^i - 1) = v_2(a - 1) = 1$; bei $2 \mid i$ ist $k := v_2(i) \in \mathbf{N}$ und $i = 2^k j$ mit $2 \nmid j$ führt wegen (2) zu

$$v_2(a^i - 1) = v_2(a^{2^k} - 1) = v_2((a - 1) \prod_{l=0}^{k-1} (1 + a^{2^l})) = z + k,$$

da hier sämtliche k von $1 + a$ verschiedenen Faktoren durch 2, aber nicht durch 4 teilbar sind. So ist im vorliegenden Ausnahmefall

$$\varepsilon(a,n,2) = \left[\frac{n+1}{2}\right] + \sum_{k \geq 1} (z+k)([2^{-k}n] - [2^{-k-1}n])$$

$$= \left[\frac{n+1}{2}\right] + z\left[\frac{n}{2}\right] + e_2(n).$$

P. Bundschuh, Köln, BRD

Aufgabe 907. Show that $(y+z)/(1+yz)$, $(z+x)/(1+zx)$ and $(x+y)/(1+xy)$ are sides of a triangle where $x = \tan A/4$, $y = \tan B/4$, $z = \tan C/4$ and A, B, C are angles of a triangle.

M. S. Klamkin, Edmonton, CDN

Lösung mit Verschärfung (von der Redaktion gekürzt): Unter Beachtung von

$$\max(u,v) < (u+v)/(1+uv), \qquad u,v \in]0,1[$$

gilt sogar für beliebige $x,y,z \in]0,1[$ die Ungleichungskette

$$\begin{aligned}(x+y)/(1+xy) < x+y &\leqslant \max(y,z) + \max(z,x)\\ &< (y+z)/(1+yz) + (z+x)/(1+zx),\end{aligned}$$

womit schon alles gezeigt ist.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Weitere Lösungen sandten E. Georgios (Athen, Griechenland), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), V.D. Mascioni (Origlio), Hj. Stocker (Wädenswil), M. Vowe (Therwil).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Oktober 1985* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44), Problem 862A (Band 36, S. 68), Problem 872A (Band 36, S. 175).

Aufgabe 920. Genau für welche Werte des komplexen Parameters c liegen alle Nullstellen des Polynoms

$$f(z) := z^3 - c\,z^2 + \bar{c}\,z - 1$$

auf dem Einheitskreis?

A. Pfluger, Zürich

Aufgabe 921. Mit den üblichen Bezeichnungen für das ebene Dreieck (siehe O. Bottema et al., Geometric Inequalities, Groningen 1969) zeige man:

$$2^{n-1} \cdot 3^{(n+3)/2} \cdot r^n \leqslant a^n \cos\frac{\alpha}{2} + b^n \cos\frac{\beta}{2} + c^n \cos\frac{\gamma}{2}$$
$$\leqslant \left[\frac{3}{2} s\left(a^{2n-1} + b^{2n-1} + c^{2n-1}\right)\right]^{1/2}, \qquad n \geqslant 1.$$

Wann genau gilt Gleichheit?

D.M. Milosevic, Pranjani, YU

Aufgabe 922. Es seien m, n gegebene natürliche Zahlen. Man beweise oder widerlege folgende Aussage: Für unendlich viele Primzahlen p gilt

$$\left(\binom{pm}{m}, n\right) = 1.$$

L. Kuipers, Sierre

Literaturüberschau

H. Amann: Gewöhnliche Differentialgleichungen. de Gruyter Lehrbuch. XI und 497 Seiten, DM 59.–. de Gruyter & Co., Berlin – Ney York 1983.

Ausser dem offensichtlichen Ziel, solide Grundkenntnisse zu vermitteln, ist es das Anliegen des Autors «dem Leser einen Einblick in grössere Zusammenhänge zu geben» und den Studenten in die nichtlineare Funktionalanalysis einzuführen.

Das Buch ist in die sechs folgenden Kapitel gegliedert: Einführung, Existenz- und Stetigkeitssätze, lineare Differentialgleichungen, qualitative Theorie, periodische Lösungen, Kontinuitäts- und Bifurkationsprobleme. Randwertprobleme und spezielle Funktionen werden nicht behandelt.

Das erste Kapitel zeigt auf, «wo Differentialgleichungen herkommen und was einige der typischen Fragestellungen sind, die in dieser Disziplin untersucht werden.» Die Kapitel zwei bis vier entsprechen dem Inhalt der meisten Bücher über gewöhnliche Differentialgleichungen. Die Kapitel fünf und sechs geben eine knappe aber übersichtliche Einführung in aktuelle Fragen der nichtlinearen Funktionalanalysis (z.B. Theorie des Brouwerschen Abbildungsgrades und, als Anwendung, die Existenz periodischer Lösungen; Verzweigungsprobleme und der Satz über Hopf-Verzweigung).