Kleine Mitteilungen

Varianten des Schwarzschen Lemma

Die Aufgabe 901 (El. Math., Vol. 38, Nr. 5, 1983) und deren Lösung (El. Math., Vol. 39, Nr. 5, 1984) haben mich auf einige Varianten des Schwarzschen Lemma gebracht, die ich nachfolgend beschreiben möchte.
Es bezeichne **D** die Kreisscheibe $\{|z| < 1\}$ und c eine komplexe Zahl vom Betrag 1; $f(z)$ ist stets eine holomorphe Funktion von **D** in **D**, die im Nullpunkt verschwindet und daher die Entwicklung $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ besitzt.
Das Schwarzsche Lemma besagt, dass $|f(z)| \leqq |z|$ in **D** und Gleichheit für ein $z_0 \neq 0$ nur eintreten kann, wenn $f(z) = cz$ ist. Durch Integration folgt daraus sofort $|\int_{-1}^{1} f(x)\,dx| < 1$, aber die Schranke 1 ist nicht scharf. Nach der von P. von Siebenthal gestellten Aufgabe 901 ist ⅔ die genaue Schranke, die nur durch die Funktionen $f(z) = cz^2$ erreicht wird. In der von R. Mortini gegebenen Lösung ist nun (implizit) die folgende Variante des Schwarzschen Lemma enthalten.

I. Es ist
(1) $|f(z) + f(-z)| \leqq 2|z|^2$ in **D**,
und für ein $z_0 (\neq 0)$ kann Gleichheit nur eintreten, wenn $f(z) = cz^2$ ist.
Mit der dortigen Bezeichnungsweise ist nämlich

$$\frac{1}{2}\,|f(z) + f(-z)| = |w(z)| \leqq |z|^2 \quad \text{und} \quad f(z) = cz^2 + v(z),$$

falls für ein $z_0 (\neq 0)$ Gleichheit besteht. Gleich wie dort schliesst man, dass $v(z)$ die Konstante Null sein muss. Aus (1) folgt dann durch Integration sofort die Aussage in Aufgabe 901, dass

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\,dx\right| = \left|\int_0^1 (f(x) + f(-x))\,dx\right| \leqq 2\int_0^1 x^2\,dx = 2/3$$

ist und Gleichheit nur eintreten kann für $f(z) = cz^2$.
Dies ist aber nur der erste Schritt zu einer Reihe von Varianten. Zur Formulierung einer zweiten setzen wir

$$\varepsilon = \exp \frac{2\pi i}{3}.$$

Sie lautet dann:

II. Es ist

$$|f(z) + f(\varepsilon z) + f(\varepsilon^2 z)| \leqq 3|z|^3 \quad \text{in} \quad \mathbf{D}\,,$$

und Gleichheit kann für ein $z_0(\neq 0)$ nur eintreten, wenn $f(z)=cz^3$ ist.
Der Beweis ist ganz analog zu jenem von Mortini. Wir setzen

$$g(z)=\frac{1}{3}\,(f(z)+f(\varepsilon z)+f(\varepsilon^2 z))$$

und $u=f-g$. Dann ist $g(\varepsilon z)=g(z)$ und daher
(2) $\quad u(z)+u(\varepsilon z)+u(\varepsilon^2 z)=0\,.$
Die Funktion g bildet $\mathbf{D}$ in sich ab und hat in 0 die Entwicklung

$$g(z)=a_3 z^3+a_6 z^6+\cdots$$

Nach der Schlussweise beim Schwarzschen Lemma ist dann $|g(z)|\leqq|z|^3, z\in\mathbf{D}$, und Gleichheit kann für ein $z_0(\neq 0)$ nur eintreten, wenn $g(z)=cz^3$ und daher $f(z)=cz^3+u(z)$ ist. Es bleibt zu zeigen, dass $u(z)$ identisch verschwindet. Wegen $|cz^3+u(z)|=|f(z)|<1$ und $|c|=1$ folgt durch quadrieren, dass

$$|z|^6+2\,\Re e\,\{cz^3\cdot u(z)\}+|u(z)|^2<1$$

ist und danach auch

$$|z|^6+2\,\Re e\,\{cz^3\cdot u(\varepsilon z)\}+|u(\varepsilon z)|^2<1$$

und

$$|z|^6+2\,\Re e\,\{cz^3\cdot u(\varepsilon^2 z)\}+|u(\varepsilon^2 z)|^2<1\,.$$

Addition und Berücksichtigung von (2) ergibt

$$3|z|^6+|u(z)|^2+|u(\varepsilon z)|^2+|u(\varepsilon^2 z)|^2<3\,,$$

also $|u(z)|^2<3(1-|z|^6)$. Gemäss dem Maximumprinzip muss u die Konstante Null und daher $f(z)=cz^3$ sein.
Nach diesem Beweis der Variante II ist für jedermann klar, wie man weitergehen könnte.

Albert Pfluger, Zürich

Didaktik und Elementarmathematik

Über ein Trapez aus merkwürdigen Punkten des Dreiecks

Ziel dieser Note ist es, auf einige bemerkenswerte Beziehungen zwischen gewissen merkwürdigen Punkten des ebenen Dreiecks hinzuweisen. Neben den vier klassischen merkwürdigen Punkten Schwerpunkt S, Umkreismittelpunkt M, Inkreismittelpunkt I und