

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 40 (1985)  
**Heft:** 2

**Artikel:** Von Polyedern im ganzzahligen Gitter  
**Autor:** Giger, H.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-38827>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 08.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

El. Math.

Band 40

Nr. 2

Seiten 33–56

Basel, 10. März 1985

## Von Polyedern im ganzzahligen Gitter

### Einleitung

Ein Polyeder, dessen Ecken Punkte des ganzzahligen Gitters sind, wird im folgenden  $\mathbf{Z}^3$ -Polyeder genannt. Punkte (und gleichzeitig deren Ortsvektoren) werden mit grossen Buchstaben bezeichnet und die Koordinaten mit entsprechenden und indizierten kleinen Buchstaben.

Auf der Suche nach einer Darstellung von  $\mathbf{Z}^3$ -Würfeln und von regulären  $\mathbf{Z}^3$ -Tetraedern (wobei angenommen werden kann, dass sich eine Ecke im Ursprung  $O$  befindet), stösst man auf zwei Erweiterungsprobleme. Es zeigt sich nämlich, dass nicht jedes  $\mathbf{Z}^3$ -Quadrat zu einem  $\mathbf{Z}^3$ -Würfel ausgebaut werden kann, wie die Punkte  $O$ ,  $(1/5/0)$ ,  $(-5/1/0)$  und  $(-4/6/0)$  veranschaulichen. Ebensowenig lässt sich jedes gleichseitige  $\mathbf{Z}^3$ -Dreieck zu einem regulären  $\mathbf{Z}^3$ -Tetraeder erweitern, wie etwa die Punkte  $O$ ,  $(3/15/0)$  und  $(-1/8/13)$  zeigen. Wir untersuchen, wann diese Erweiterungen möglich sind, und finden damit notwendige Bedingungen für die Existenz von  $\mathbf{Z}^3$ -Würfeln und von regulären  $\mathbf{Z}^3$ -Tetraedern. Die Lösung des Quadratproblems führt zur Frage, ob jede  $\mathbf{Z}^3$ -Strecke mit ganzzahliger Länge Kante eines  $\mathbf{Z}^3$ -Würfels ist, d. h. ob jedes pythagoreische Quadrupel  $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$  ( $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$ ) zu einem Kantenvektor  $(a/b/c)$  eines  $\mathbf{Z}^3$ -Würfels führt, wie es für  $c = 0$ , d. h. für ein pythagoreisches Tripel, leicht einsichtig ist. Wir beantworten diese Frage durch die Angabe der Drehung, welche ein gegebenes Dreibein von pythagoreischen Quadrupeln aus einem dazu kongruenten Koordinaten-Dreibein entstehen lässt, und gewinnen damit eine Möglichkeit, alle  $\mathbf{Z}^3$ -Würfel explizit zu beschreiben.

Die Flächendiagonalen eines  $\mathbf{Z}^3$ -Würfels bilden die Kanten von zwei regulären  $\mathbf{Z}^3$ -Tetraedern. Wir zeigen, dass auf diese Weise alle regulären  $\mathbf{Z}^3$ -Tetraeder erfasst werden. Die oben erwähnte explizite Beschreibung der  $\mathbf{Z}^3$ -Würfel beinhaltet damit auch die Beschreibung aller regulären  $\mathbf{Z}^3$ -Tetraeder.

1. Wir beginnen unsere Betrachtung mit einem  $\mathbf{Z}^3$ -Quadrat mit den Ecken  $O, A, B$  und  $A + B$ . Für seine Seitenlänge  $s$  gilt die Beziehung  $s^2 = A^2$ , das heisst,  $s^2$  ist eine natürliche Zahl. Erweitert man das Quadrat zu einem Würfel, so gilt für die Würfecke  $C$  «über»  $O$ :

$$C = \frac{1}{s} (A \times B) \quad \text{oder} \quad C = -\frac{1}{s} (A \times B). \quad (1.1)$$

Liegt  $C$  in  $\mathbf{Q}^3$ , so folgt aus  $C \neq O$ , dass  $s$  eine rationale Zahl sein muss. Da aber  $s^2$  in  $\mathbf{N}$  zu finden ist, muss  $s$  selbst eine natürliche Zahl sein.

Um herauszufinden, ob die Ganzzahligkeit von  $s$  auch eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines  $\mathbf{Z}^3$ -Würfels ist, betrachten wir die orthonormierte Matrix, deren Zeilen von den Koordinaten der Punkte  $\frac{A}{s}, \frac{B}{s}$  und  $\frac{C}{s}$  gebildet werden. Da auch die Spalten dieser Matrix ein orthonormiertes Dreibein bilden, gilt für  $i \in \{1, 2, 3\}$

$$a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = s^2. \quad (1.2)$$

Ist nun  $s$  eine ganze Zahl, so liegt  $C$  nach (1.1) sicher in  $\mathbf{Q}^3$ . (1.2) bedingt zusätzlich, dass  $c_i^2$  für jeden Wert von  $i$  eine ganze Zahl ist.  $C$  liegt daher in  $\mathbf{Z}^3$ . Da die restlichen Ecken des Würfels in  $A + C$ ,  $B + C$  und  $A + B + C$  zu finden sind, gilt somit

**Satz 1.** Ein  $\mathbf{Z}^3$ -Quadrat lässt sich genau dann zu einem  $\mathbf{Z}^3$ -Würfel erweitern, wenn die Quadratseite eine ganzzahlige Länge hat.

Dieser Satz bedingt, dass die Koordinaten von  $A, B$  respektive  $C$  jedes  $\mathbf{Z}^3$ -Würfels zusammen mit  $s$  ein pythagoreisches Quadrupel bilden. Alle diese Quadrupel sind bekannt (vgl. [1] und [2]): mit Hilfe der ganzzahligen Parameter  $m, n, p$  und  $q$  lässt sich etwa  $A$  (bis auf eine Permutation der Koordinaten) darstellen als  $(m^2 + q^2 - (n^2 + p^2))/2(mn - pq)/2(mp + nq)$ , wobei  $s = m^2 + n^2 + p^2 + q^2$ . Tatsächlich lässt sich sogar ein gleichseitiges orthogonales  $\mathbf{Z}^3$ -Dreibein mit Kante  $OA$  konstruieren.

Wir beschreiben eine Drehung um die gerichtete Gerade  $g$  durch  $O$  mit Hilfe von Quaternionen. Ist  $E$  der Richtungsvektor von  $g$  (mit Länge 1) und  $w$  der Drehwinkel, so lässt sich diese Abbildung  $P \rightarrow P'$  darstellen als  $\mathbf{P}' = \mathbf{D}(-w) \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{D}(w)$  mit den Quaternionen  $\mathbf{D}(w) = \cos \frac{w}{2} + \sin \frac{w}{2} \cdot E$  und  $\mathbf{P} = O + P$ ,  $P$  in  $\mathbf{R}^3$ .

Das Koordinatendreibein mit Kantenlänge  $s$  wird in ein orthogonales  $\mathbf{Z}^3$ -Dreibein mit Kante  $OA$  übergeführt, wenn man es der Drehung unterwirft, welche durch folgende Daten gegeben ist:

$$\cos \frac{w}{2} = \frac{q}{\sqrt{s}}, \quad \sin \frac{w}{2} = \sqrt{\frac{m^2 + n^2 + p^2}{s}}, \quad E = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} (m/n/p).$$

In der Tat gewinnt man so

**Satz 2.** Die Nachbarecken von  $O$  jedes  $\mathbf{Z}^3$ -Würfels lassen sich mit Hilfe der ganzzahligen Parameter  $m, n, p$  und  $q$  wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} A &= (m^2 + q^2 - (n^2 + p^2))/2(mn - pq)/2(mp + nq)), \\ B &= (2(mn + pq))/n^2 + q^2 - (m^2 + p^2)/2(np - mq)), \\ C &= (2(mp - nq))/2(mq + np)/p^2 + q^2 - (m^2 + n^2)). \end{aligned}$$

2. Wir führen unsere Betrachtungen mit einem gleichseitigen  $\mathbf{Z}^3$ -Dreieck  $OXY$  der Kantenlänge  $d$  fort. Es gilt also  $X^2 = d^2 = Y^2$  und  $X \cdot Y = \frac{1}{2}d^2$ . Da  $X$  und  $Y$  in  $\mathbf{Z}^3$  liegen, folgt:

$$d^2 \text{ liegt in } 2 \mathbf{N}. \quad (2.1)$$

Baut man  $OXY$  zu einem regulären Tetraeder aus, so gilt für die vierte Ecke:

$$Z = \frac{X + Y}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3d} (X \times Y) \quad \text{oder} \quad Z^* = \frac{X + Y}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3d} (X \times Y). \quad (2.2)$$

Liegt diese vierte Ecke in  $\mathbf{Q}^3$ , so muss  $\frac{d}{\sqrt{2}}$  eine rationale Zahl sein. Nach (2.1) ist aber ihr Quadrat eine ganze Zahl. Somit finden wir die Darstellung

$$d = s\sqrt{2}, \quad \text{wobei } s \in \mathbf{N}. \quad (2.3)$$

Wiederum fragt man sich, ob diese Bedingung auch hinreichend ist. Mit  $X = (1/1/0)$  und  $Y = (1/0/1)$  findet man ein reguläres Tetraeder mit  $Z = \frac{1}{3}(4/ - 1/ - 1)$ , aber auch mit  $Z^* = (0/1/1)$ . Um einzusehen, ob dieses Beispiel typischen Charakter hat, fassen wir das Tetraeder  $OXYZ$  mit Kantenlänge  $d = s\sqrt{2}$  als Flächendiagonalen-Tetraeder eines Würfels mit Kantenlänge  $s$  auf. Für die zu  $O$  benachbarten Würfelsecken  $A$ ,  $B$  und  $C$  findet man zum Beispiel

$$A = \frac{Y + Z - X}{2}, \quad B = \frac{X + Z - Y}{2}, \quad C = \frac{X + Y - Z}{2}. \quad (2.4)$$

Dies ermöglicht uns, wiederum die Kolonnen der orthonormierten Matrix zu betrachten, die von  $A$ ,  $B$  und  $C$  erzeugt wird. Setzt man die Darstellungen (2.4) in (1.2) ein, so erhält man

$$3z_i(z_i - 2s_i) = 4s^2 - 3x_i^2 - 3y_i^2 + 2x_iy_i, \quad (2.5)$$

wobei  $S$  der Schwerpunkt des Dreiecks  $OXY$  ist. Erweitert man (2.5) mit 3, so gewinnt man durch quadratisches Ergänzen

$$(3z_i - x_i - y_i)^2 = 4(3s^2 - 2x_i^2 - 2y_i^2 + 2x_iy_i). \quad (2.6)$$

Ist nun  $s$  eine natürliche Zahl, so sind  $3Z$  und  $3Z^*$  nach (2.2) beide in  $\mathbf{Q}^3$ . Da  $X$  und  $Y$  in  $\mathbf{Z}^3$  liegen, bedingt (2.6), dass  $(3z_i - x_i - y_i)^2$  eine ganze Zahl ist. Beide Aussagen zusammen machen klar, dass  $3z_i$  für jeden Wert von  $i$  eine ganze Zahl sein muss, das heißt,  $3Z$  liegt in  $\mathbf{Z}^3$ . Da  $S$  in der Mitte von  $Z$  und  $Z^*$  liegt und  $3S = X + Y$  ist, so folgt aus  $Z + Z^* = 2S$  zusammenfassend:

$$3Z \text{ und } 3Z^* \text{ liegen in } \mathbf{Z}^3. \quad (2.7)$$

Weiter ist  $(3Z)^2 = (3Z^*)^2 = 18s^2$  und  $(3S)^2 = (X + Y)^2 = 6s^2$ . Die Punkte  $3Z$ ,  $3Z^*$  und  $3S$  genügen daher den Voraussetzungen des folgenden Hilfssatzes:

**Lemma.** *Ist  $H$  in  $\mathbf{Z}^3$  und ist  $H^2$  eine Dreierzahl, so sind entweder alle Koordinaten von  $H$  Dreierzahlen oder überhaupt keine.*

Sind nämlich  $h_1$  und  $h_2$  Dreierzahlen, so gilt dies auch für  $h_3^2$ , also auch für  $h_3$  selbst, ist doch  $h_3$  eine ganze Zahl.

Wäre nur  $h_1$  eine Dreierzahl, so wären  $h_2^2$  und  $h_3^2$  beide in  $3\mathbf{Z} + 1$  und  $H^2$  läge damit in  $3\mathbf{Z} + 2$ .

Wir benützen dieses Lemma bei der Diskussion von (2.5), indem wir beachten, dass die betrachteten Fälle simultan für alle Koordinaten auftreten.

Ist  $S$  in  $\mathbf{Z}^3$ , so folgt aus (2.5) und (2.7), dass  $3z_i^2$  eine ganze Zahl sein muss. Für den Punkt  $P = 3Z$  ist damit sogar  $\frac{1}{3}p_i^2$  eine ganze Zahl, das heisst,  $P$  liegt in  $(3\mathbf{Z})^3$ . Damit ist aber  $Z$  selbst in  $\mathbf{Z}^3$  und ebenso dann  $Z^*(= 2S - Z)$ .

Liegt  $S$  nicht in  $\mathbf{Z}^3$ , dann (wegen  $3S \in \mathbf{Z}^3$ ) auch nicht  $2S$ , und es gibt zwei Möglichkeiten:

- Ist  $Z$  in  $\mathbf{Z}^3$ , so liegt  $Z^*(= 2S - Z)$  nicht in  $\mathbf{Z}^3$ .
- Ist  $Z$  nicht in  $\mathbf{Z}^3$ , so müssen die Koordinaten von  $P$  alle teilerfremd sein zu 3. (2.5) lässt sich umschreiben zu

$$\frac{1}{3}p_i(p_i - 6s_i) \in \mathbf{Z}.$$

Da  $P$  in  $\mathbf{Z}^3$  liegt, nicht aber  $\frac{P}{3}$ , so muss  $\frac{1}{3}(P - 6S)$  in  $\mathbf{Z}^3$  liegen, also auch  $2S - Z$ , was aber  $Z^*$  ist.

Zusammenfassend haben wir damit

**Satz 3.** *Ein gleichseitiges  $\mathbf{Z}^3$ -Dreieck lässt sich genau dann zu einem regulären  $\mathbf{Z}^3$ -Tetraeder ausbauen, wenn seine Kantenlänge von der Form  $s\sqrt{2}$  ist, wobei  $s \in \mathbf{N}$ . Ist dabei der Schwerpunkt  $S$  des Dreiecks in  $\mathbf{Z}^3$ , so sind beide Erweiterungen  $\mathbf{Z}^3$ -Tetraeder. Liegt  $S$  nicht in  $\mathbf{Z}^3$ , so ist nur eine Erweiterung ein  $\mathbf{Z}^3$ -Polyeder. Die andere Erweiterung wird dies erst, wenn sie von  $O$  aus mit dem Faktor 3 gestreckt wird.*

Abschliessend stellt sich auch hier die Frage, ob jede  $\mathbf{Z}^3$ -Strecke mit einer Länge in  $\sqrt{2}\mathbf{N}$  in ein reguläres  $\mathbf{Z}^3$ -Tetraeder eingebettet werden kann. Versucht man eine Antwort im Sinne der Herleitung von Satz 2 zu finden, so stösst man auf (wie uns scheint) heikle zahlentheoretische Probleme.

Um doch noch zu einer Aufzählung der regulären  $\mathbf{Z}^3$ -Tetraeder zu gelangen, kann man prüfen, ob der Ausbau (2.4) aus jedem regulären  $\mathbf{Z}^3$ -Tetraeder einen  $\mathbf{Z}^3$ -Würfel entstehen lässt. Dabei genügt es zu zeigen, dass die Würfelecke  $D = \frac{1}{2}(X + Y + Z)$  in  $\mathbf{Z}^3$  liegt, gilt doch  $A = D - X, B = D - Y$  und  $C = D - Z$ .

Da nach (2.1)  $d^2$  eine gerade Zahl ist, können die Punkte  $X, Y$  und  $Z$  nur in den Teilmengen  $\mathbf{G}^3, \mathbf{G} \times \mathbf{U}^2, \mathbf{U} \times \mathbf{G} \times \mathbf{U}$  und  $\mathbf{U}^2 \times \mathbf{G}$  von  $\mathbf{Z}^3$  liegen, wobei  $\mathbf{G}$  die Menge der

geraden Zahlen und  $\mathbf{U}$  die Menge der ungeraden Zahlen bezeichnen. Diese vier Teilmengen bilden bezüglich der komponentenweisen Paritätsaddition eine Kleinsche Vierergruppe  $V$ .

Liegt etwa  $X$  in  $\mathbf{G}^3$ , so ist  $d^2$  in  $4 \mathbf{N}$ , also müssen auch  $Y$  und  $Z$  in  $\mathbf{G}^3$  liegen. Liegt keiner der Punkte in  $\mathbf{G}^3$ , so dürfen keine zwei Punkte im gleichen Element von  $V$  sein, ist doch  $(X - Y)^2 = (X - Z)^2 = (Y - Z)^2 = d^2$  und  $d^2 \in 4 \mathbf{N} + 2$ .

Somit ist in beiden Fällen  $X + Y + Z$  in  $\mathbf{G}^3$ :

**Satz 4.** *Ein Flächendiagonalen-Tetraeder eines Würfels kann nur dann ein  $\mathbf{Z}^3$ -Polyeder sein, wenn der Würfel selbst ein  $\mathbf{Z}^3$ -Polyeder ist.*

Mit Hilfe der Sätze 4 und 2 lassen sich somit auch alle regulären  $\mathbf{Z}^3$ -Tetraeder aufzählen.

Abschliessend möchten wir H. Debrunner für wertvolle Hinweise danken.

H. Giger, Bern, und H. Hösli, Ittigen

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 F. Steiger: Über die Grundlösungen der Gleichung  $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ . El. Math. XI/5, 105–109 (1956).
- 2 F. Steiger: Über die Grundlösungen der Gleichung  $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ . MNU, Band 10, Heft 2, S.83–86 (1957/58).