Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 40 (1985)
Heft: 1

Rubrik: Kleine Mitteilungen

dem Ziel näher zu kommen, bestimmte praktisch den Repetitionsschritt, ausser (im binären Suchen) die Definition von m. Tatsächlich bleibt der Algorithmus korrekt und endet nach einer endlichen Zahl von Schritten, wenn nur zugesichert ist, dass im Falle $j \geqslant i$ die Beziehungen $m \geqslant i$ und $m \leqslant j$ garantiert sind.
Zielgerichtetes Vorgehen wird sich auch im nächsten Beispiel auszahlen. Es stammt von D. Gries [5] und heisst der *Wohlfahrtsschwindler*. Im Gegensatz zu den bisherigen Suchproblemen, ist das Suchargument hier nicht explizit bekannt. Drei geordnete Listen a[0], a[1], ..., a[$n-1$], b[0], b[1], ..., b[$m-1$] und c[0], c[1], ..., c[$l-1$] sind nun im Spiel. Die erste enthält die Namen aller Studenten der New York University, die zweite die Namen aller Angestellten von IBM New York und die dritte die Namen aller Wohlfahrtsbezüger von New York. Die Aufgabe besteht darin, ein Programm zu schreiben, welches eine Person sucht, die auf allen drei Listen registriert ist.
Die Listenelemente sind nun Ketten von Zeichen statt Zahlen. Wir nehmen an, dass sie *lexikographisch* geordnet sind. Die Schlussbedingung muss von der Form a[i] = b[j] = c[k] für geeignete Indexwerte i, j und k sein. Die Wachen definieren wir nach einem Schema, welches sich in einem früheren Beispiel bewährt hat. Ausserdem führen wir drei Sentinels a[n], b[m] und c[l] ein:

$$
\begin{aligned}
&a[n], b[m], c[l], i, j, k := \infty, \infty, \infty, 0, 0, 0;\\
&\mathrm{DO}\, a[i] > b[j] \rightarrow i := j + 1\\
&\quad | b[j] > c[k] \rightarrow k := k + 1\\
&\quad | c[k] > a[i] \rightarrow i := i + 1\\
&\mathrm{OD}
\end{aligned}
$$

Die Schlussbedingung a[i] $\leqslant$ b[j] $\leqslant$ c[k] $\leqslant$ a[i] liefert das Resultat. Die Invariante ist hier leer, falls man nicht die eher technische Bedingung $0 \leqslant i \leqslant n$ und $0 \leqslant j \leqslant m$ und $0 \leqslant k \leqslant l$ als Invariante betrachtet. Der Algorithmus terminiert nach höchstens $n + m + l$ Repetitionsschriften, da bei jedem Schritt genau ein Index erhöht wird.
(Fortsetzung im nächsten Heft)

J. Gutknecht, Institut für Informatik, ETH Zürich

 0013-6018/85/060011-12$1.50 + 0.20/0

Kleine Mitteilungen

Über einen Wert, der zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel zweier Zahlen liegt

In dieser kleinen Mitteilung soll gezeigt werden, dass für positive reelle Zahlen a und b (mit $a < b$) der Wert $(e/a)^a (b/e)^b$ zwischen der $(b-a)$-ten Potenz des geometrischen und des arithmetischen Mittels von a und b liegt. (Mit e wird wie üblich die Eulersche Zahl bezeichnet.)

Satz. Für $b > a > 0$ gilt:

$$(\sqrt{ab})^{b-a} < \left(\frac{e}{a}\right)^a \left(\frac{b}{e}\right)^b < \left(\frac{a+b}{2}\right)^{b-a}. \tag{1}$$

Beweis: Sei $a > 0$. Wir definieren $g: (0, \infty) \to \mathbf{R}$ und $h: (0, \infty) \to \mathbf{R}$ durch

$$g(x) := \log \frac{x^x}{a^a} + (a - x)\left[1 + \log \frac{a+x}{2}\right],$$

$$h(x) := \log \frac{x^x}{a^a} + (a - x)\left[1 + \frac{1}{2}\log(ax)\right],$$

und zeigen, dass

$$g(x) < 0 < h(x) \quad \text{für} \quad x > a; \tag{2}$$

setzt man $x = b$ in (2), so folgt (1).
Da $g(a) = h(a) = 0$, ist (2) eine Folgerung von

$$g'(x) < 0 < h'(x) \quad \text{für} \quad x > a. \tag{3}$$

Und (3) lässt sich auf die elementare Ungleichung

$$\frac{t}{t+1} < \log(1+t) < t \quad \text{für} \quad t > 0$$

zurückführen, denn

$$g'(x) = \log\left(1 + \frac{x-a}{x+a}\right) - \frac{x-a}{x+a}$$

und

$$h'(x) = \frac{1}{2}\left(\log\frac{x}{a} + \frac{a-x}{x}\right).$$

Bemerkung: Es lässt sich zeigen, dass (1) zu den beiden Doppelungleichungen:

$$\left(1 + \frac{1}{c}\right)^c \frac{c+1}{c+\frac{1}{2}} < e < \left(1 + \frac{1}{c}\right)^{c+1} \sqrt{\frac{c}{c+1}} \quad (c > 0), \tag{4}$$

$$(1+d)^{d/2} < e^{-d}(1+d)^{1+d} < \left(1 + \frac{d}{2}\right)^d \quad (d > 0) \tag{5}$$

äquivalent ist.

Bei (4) handelt es sich um eine Verschärfung der bekannten Beziehung:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Wir wissen bereits, dass sich aus (1) sowohl (4) als auch (5) ergibt; denn, wenn wir $b = c + 1$ und $a = c$ $(c > 0)$ in (1) setzen, so folgt (4); und wenn wir in (1) den Wert b durch $d + 1$ $(d > 0)$ sowie a durch 1 ersetzen, dann erhalten wir (5).
Nun zeigen wir, dass einerseits (1) aus (5) und andererseits (5) aus (4) folgt.
Dazu setzen wir

$$F(a,b) := \frac{\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^{b-a}}{\left(\dfrac{e}{a}\right)^a \left(\dfrac{b}{e}\right)^b} \quad (a \neq 0)$$

und

$$G(a,b) := \frac{(ab)^{(b-a)/2}}{\left(\dfrac{e}{a}\right)^a \left(\dfrac{b}{e}\right)^b} \quad (a \neq 0);$$

dann können wir die Ungleichungen (1), (4) und (5) wie folgt schreiben:

$$G(a,b) < 1 < F(a,b) \quad (b > a > 0), \tag{1}$$

$$\left[G\left(1, 1+\frac{1}{c}\right)\right]^c < 1 < \left[F\left(1, 1+\frac{1}{c}\right)\right]^c \quad (c > 0), \tag{4}$$

$$G(1, 1+d) < 1 < F(1, 1+d) \quad (d > 0). \tag{5}$$

Ein einfacher Beweis zeigt die Gültigkeit von

$$F(a,b) = \left[F\left(1, \frac{b}{a}\right)\right]^a \quad (a \neq 0)$$

und

$$G(a,b) = \left[G\left(1, \frac{b}{a}\right)\right]^a \quad (a \neq 0).$$

Wenn wir $d = \dfrac{b}{a} - 1$ $(b > a > 0)$ in (5) setzen, so erhalten wir (1); und $c = \dfrac{1}{d}$ $(d > 0)$ in (4) liefert uns (5).

Horst Alzer, Wuppertal

 0013-6018/85/060022-03$1.50 + 0.20/0