

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 39 (1984)  
**Heft:** 2

**Artikel:** W-Kurven in der ebenen Lie-Geometrie. 1. Teil  
**Autor:** Pinkall, U.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-38014>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 26.04.2026

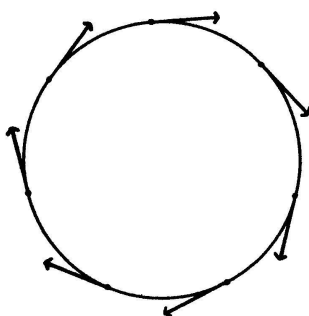
**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# W-Kurven in der ebenen Lie-Geometrie

(1. Teil)

## 1. Das Übertragungsprinzip für Linienelemente

Grundelemente der ebenen Lie-Geometrie sind orientierte Linienelemente und orientierte Kreise. Ein orientierter Kreis kann aufgefaßt werden als Menge aller orientierten Linienelemente, die ihn gleichsinnig berühren (Fig. 1).



Figur 1

Weil im folgenden immer nur orientierte Kreise und Linienelemente betrachtet werden, lassen wir das Beiwort «orientiert» meistens weg.

Es soll zunächst eine analytische Beschreibung für die Linienelemente der Möbiusebene gefunden werden. Wir gehen aus von der in der Funktionentheorie üblichen Behandlung der ebenen Möbiusgeometrie mit Hilfe komplexer Zahlen:

Die Gaußsche Zahlenebene  $\mathbb{C}$  wird durch Hinzunahme des Punktes  $\infty$  zur Möbiusebene  $\bar{\mathbb{C}}$  erweitert. Orientierungstreue Möbiusabbildungen lassen sich beschreiben durch gebrochen lineare Abbildungen  $\bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ ,

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit } a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0. \quad (1)$$

Offensichtlich wird hier mit einem inhomogenen Parameter  $z$  auf der komplexen projektiven Geraden gerechnet: Sei  $U$  ein zweidimensionaler komplexer Vektorraum. Ist  $\alpha_1, \alpha_2$  eine Basis von  $U$ , so beschreibt die Abbildung

$$z_1 \alpha_1 + z_2 \alpha_2 \mapsto z := \frac{z_1}{z_2} \quad (2)$$

einen inhomogenen Parameter auf der projektiven Geraden  $M$ , die zu  $U$  gehört. Jede Projektivität  $\alpha: M \rightarrow M$  wird induziert von einer linearen Abbildung  $A: U \rightarrow U$  mit  $\det A \neq 0$ . Der Parameter  $z$  transformiert sich unter  $\alpha$  gerade wie in (1).

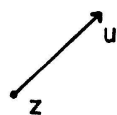
Um nun in diesem Rahmen eine Beschreibung für die orientierten Linienelemente zu finden, zeichnen wir in  $U$  eine Determinantenfunktion  $\det$  aus. Eine Basis  $\alpha_1, \alpha_2$  von  $U$  nennen wir «normiert», wenn  $\det(\alpha_1, \alpha_2) = 1$ .

$U$  kann als vierdimensionaler reeller Vektorraum aufgefaßt werden, der zugehörige reelle projektive Raum  $\mathbb{P}^3$  ist dreidimensional. Wir werden jedem  $r \in \mathbb{P}^3$  ein orientiertes Linienelement von  $M$  zuordnen.

Sei zunächst  $\alpha_1, \alpha_2$  eine normierte Basis von  $U$ . Der inhomogene Parameter

$$r = z_1 \alpha_1 + z_2 \alpha_2 \mapsto z(r) := \frac{z_1}{z_2} \tag{3}$$

kann auch als Karte auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$  aufgefaßt werden. In dieser Karte kann jedes Linienelement, das nicht zum Punkt  $\infty$  gehört, charakterisiert werden durch einen Punkt  $z \in \mathbb{C}$  und einen Einheitsvektor  $u \in \mathbb{C}$  (Fig. 2).



Figur 2

Jedem Punkt  $z_1 \alpha_1 + z_2 \alpha_2 \in \mathbb{P}^3$  ordnen wir nun dasjenige Linienelement  $(z, u)$  zu, mit

$$z = \frac{z_1}{z_2}, \quad u = \frac{\bar{z}_2}{z_2}. \tag{4}$$

Man bestätigt leicht, dass diese Zuordnung wohldefiniert und injektiv ist, und dass jedes Paar  $(z, u)$  als Bild vorkommt. Weiter kann man zeigen, dass sie auch unabhängig von der Auswahl der normierten Basis  $\alpha_1, \alpha_2$  ist.

Die Idee, die orientierten Linienelemente auf die Punkte eines dreidimensionalen projektiven Raumes abzubilden, geht im wesentlichen auf Sophus Lie zurück ([5], S. 238 ff.). Auch später wird dieses Abbildungsprinzip noch erwähnt [8], jedoch scheint es nie zu konkreten geometrischen Untersuchungen herangezogen worden zu sein. Die einzigen differentialgeometrischen Arbeiten zur ebenen Lie-Geometrie, die dem Verfasser bekannt sind ([6] und [7]), verwenden das Quadrikmodell.

Neu zu sein scheint unser Zugang über die komplexen Zahlen, der, wie wir sehen werden, es besonders einfach macht, Lie-geometrische Aussagen anschaulich zu deuten.

## 2. Lie-geometrische Beschreibung von Kurven

Lie-geometrisch wird man eine ebene Kurve beschreiben als eine einparametrische Schar von Linienelementen, die noch einer gewissen «Streifenbedingung» genügt (Fig. 3).



Figur 3

In Koordinaten (4) wird eine solche Schar dargestellt durch  $t \mapsto (z(t), u(t))$ , und die zu fordernde Bedingung lautet offenbar

$$\frac{z'}{u} \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Wir können diese Bedingung aber auch koordinatenfrei formulieren, denn es gilt

$$\frac{z'}{u} = \frac{z'_1 z_2 - z_1 z'_2}{z_2^2} \cdot \frac{z_2}{\bar{z}_2} = - \frac{1}{z_2 \bar{z}_2} \det(r, r'), \quad (6)$$

mit  $r := (z_1, z_2)$ . Die Linienelemente  $r(t)$  hüllen also genau dann eine Kurve ein, wenn

$$\omega(r, r') = 0, \quad (7)$$

mit  $\omega := \text{Im det}$ .  $\omega$  ist eine nicht ausgeartete schiefsymmetrische Bilinearform auf  $U$ , d. h. die Geraden  $r \wedge \eta$  in  $\mathbb{P}^3$  mit  $\omega(r, \eta) = 0$  bilden einen nicht ausgearteten linearen Komplex  $K$  (vgl. Bol [3], S. 72 ff.). Den Scharen von Linienelementen, die Kurven einhüllen, entsprechen in  $\mathbb{P}^3$  also gerade die Komplexkurven eines festen linearen Komplexes  $K$ .

Den Komplexgeraden von  $K$  entsprechen die orientierten Kreise: Sei  $t \mapsto r(t)$  eine Parametrisierung einer solchen Geraden mit  $r'' = 0$ . Beschreibt  $t \mapsto (z(t), u(t))$  wie in (4) die Linienelementeschar  $t \mapsto r(t)$  in einer Karte, so ist entweder  $u' = 0$  und die Kurve ist eine Gerade, oder es gilt

$$\left( \frac{z'}{u'} \right)' = \left( \frac{z'_1 z_2 - z_1 z'_2}{\bar{z}'_2 z_2 - \bar{z}_2 z'_2} \right)' = 0. \quad (8)$$

Im Fall  $z' = 0$ artet die Kurve zu einem Punkt (als Linienelementgebilde aufgefaßt) aus. Für  $z' \neq 0$  ist aber  $z'/u'$  gerade gleich  $i/\kappa$ , wobei  $\kappa$  die euklidische Krümmung der Kurve  $t \mapsto z(t)$  in  $\mathbb{C}$  ist. Als Kurve konstanter Krümmung beschreibt  $z$  somit einen Kreis.

Weil in der ebenen Lie-Geometrie Punkte, orientierte Geraden und orientierte Kreise zum Oberbegriff «Lie-Kreis» (wir sprechen im folgenden kurz von «Kreisen») zusammengefasst werden, haben wir damit gezeigt, dass jeder Komplexgeraden von  $K$  ein Lie-Kreis entspricht.

Man sieht leicht, dass umgekehrt zu jedem Lie-Kreis der Möbiusebene in  $\mathbb{P}^3$  eine Komplexgerade von  $K$  gehört. Klar ist auch, dass die Tangente an eine Komplexkurve  $t \mapsto r(t)$  von  $K$  gerade dem orientierten Schmiegekreis der zugehörigen Kurve in  $M$  entspricht.

Unter einer «Lie-Transformation» wollen wir eine Projektivität  $\alpha: \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$  verstehen, die  $K$  festlässt. Lie-geometrisch gedeutet ist  $\alpha$  dann eine kreistreue Permutation der Linienelemente.

Insgesamt haben wir das folgende Abbildungsprinzip erhalten:

Möbiusebene	Bildraum $\mathbb{P}^3$
orientiertes Linienelement	Punkt
Lie-Kreis	Komplexgerade von $K$
Kurve	Komplexkurve von $K$
Schmiegekreis einer Kurve	Tangente der zugehör. Komplexkurve
Lie-Transformation	Projektivität von $\mathbb{P}^3$ , die $K$ festlässt

### 3. Lie-W-Kurven

Eine Lie-W-Kurve ist eine Kurve in der Möbiusebene, die eine Einparametergruppe von Lie-Transformationen gestattet.

Jede Einparametergruppe  $t \mapsto \alpha(t)$  von Lie-Transformationen wird induziert von einer Einparametergruppe  $t \mapsto A(t)$  von (reell) linearen Abbildungen  $A(t): U \rightarrow U$ , die  $\omega$  festlassen, d. h. für die gilt

$$\omega(A(t)r, A(t)\eta) = \omega(r, \eta) \quad \text{alle } r, \eta \in U. \tag{9}$$

Durch Differenzieren von (9) folgt wegen  $A(0) = I$

$$\omega(Xr, \eta) + \omega(r, X\eta) = 0 \quad \text{alle } r, \eta \in U \tag{10}$$

mit  $X := A'(0)$ .

Ist  $r_0$  ein Linienelement, so werden die Linienelemente  $r(t) := A(t)r_0$  im allgemeinen keine Kurve einhüllen (Fig. 3). Die Bedingung, dass dies doch der Fall ist, (d. h. dass  $t \mapsto r(t)$  eine Lie-W-Kurve beschreibt) ist die, dass  $r$  eine Komplexkurve von  $K$  ist, d. h. dass gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \omega(r(t), r'(t)) \\ &= \omega(A(t)r_0, A(t)A'(0)r_0) \\ &= \omega(r_0, Xr_0). \end{aligned} \tag{11}$$

Weil nach (10) die Abbildung

$$r, \eta \rightarrow \omega(r, X\eta) \tag{12}$$

eine symmetrische Bilinearform ist, ist (11) die Gleichung einer Quadrik  $Q$  in  $\mathbb{P}^3$ .

Weil  $\omega$  nicht ausgeartet ist, gibt es umgekehrt zu jeder Quadrik  $Q$  in  $\mathbb{P}^3$  eine bis auf die Normierung eindeutig bestimmte lineare Abbildung  $X: U \rightarrow U$

mit der Eigenschaft (10), so dass (11) gerade die Gleichung von  $Q$  ist.  $Q$  ist invariant unter den Lie-Transformationen

$$A(t) := \exp(tX), \tag{13}$$

und die Kurven  $t \mapsto A(t) r_0, r_0 \in Q$  beschreiben Lie-W-Kurven.

Geometrisch kann man die Lie-W-Kurven auf einer Quadrik  $Q \subset \mathbb{P}^3$  folgendermassen beschreiben: Abgesehen von gewissen Ausnahmepunkten schneidet die Tangentialebene an  $Q$  in einem Punkt  $r \in Q$  die Nullebene bezüglich  $K$  von  $r$  in einer Geraden. Diese Geraden bilden ein Richtungsfeld, dessen Integralkurven die W-Kurven auf  $Q$  sind.

In der Möbiusebene gedeutet, beschreibt eine Quadrik  $Q \subset \mathbb{P}^3$  eine zweiparametrische Schar von Linienelementen, d.h. ein Richtungsfeld. Wir können daher sagen, dass die Lie-W-Kurven gerade die Integralkurven von «quadratischen Richtungsfeldern» sind.

Wir stellen noch einige Formeln zusammen, die bei der anschaulichen Diskussion der W-Kurvenscharen sehr nützlich sein werden. Ist in  $U$  eine normierte Basis  $a_1, a_2$  gewählt, so kann  $U$  durch

$$z_1 a_1 + z_2 a_2 \mapsto \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \tag{14}$$

mit  $\mathbb{C}^2$  identifiziert werden. Durch  $z_1 = x_0 + i x_1, z_2 = x_2 + i x_3$  sind dann reelle Koordinaten  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$  in  $U$  definiert.  $\omega = \text{Im det}$  hat in diesen Koordinaten die Form

$$\omega(x, \eta) = x_0 y_3 - x_3 y_0 + x_1 y_2 - x_2 y_1. \tag{15}$$

In Matrizenform geschrieben:  $\omega(r' \eta) = r' E \eta$  mit

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Zu einer symmetrischen Bilinearform  $r, \eta \mapsto B(r, \eta) = r' A \eta$  findet man das zugehörige  $X$  mit  $B(x, \eta) = \omega(x, X \eta)$  für alle  $x, \eta \in U$  als

$$X = -EA. \tag{17}$$

Wenn ein Linienelement wie in (4) als  $(z, u)$  gegeben ist, so ist  $r = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$  mit

$$z_1 = \frac{z}{\sqrt{u}}, \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{u}} \tag{18}$$

ein zugehöriger Vektor in  $U$ . Die folgende Tabelle gibt an, wie man eine Quadrikgleichung  $\sum a_{ik} x_i x_k = 0$  auf die Linienelementkoordinaten  $(z, u)$

umrechnen kann. Wir schreiben  $\langle z, w \rangle := \frac{1}{2} (z \bar{w} + \bar{z} w)$  für das Skalarprodukt in der Gaußschen Zahlenebene.

$$\begin{aligned}
 x_0^2 - x_1^2 &= \operatorname{Re} z_1^2 = \operatorname{Re} \frac{z^2}{u_2} &= \langle z^2, u \rangle \\
 2x_0 x_1 &= \operatorname{Im} z_1^2 = \operatorname{Im} \frac{z^2}{u} &= -\langle i z^2, u \rangle \\
 x_0 x_2 - x_1 x_3 &= \operatorname{Re} (z_1 z_2) = \operatorname{Re} \frac{z}{u} &= \langle z, u \rangle \\
 x_1 x_2 + x_0 x_3 &= \operatorname{Im} (z_1 z_2) = \operatorname{Im} \frac{z}{u} &= -\langle i z, u \rangle \\
 x_2^2 - x_3^2 &= \operatorname{Re} z_2^2 = \operatorname{Re} u = \langle 1, u \rangle &= \cos \varphi \\
 2x_2 x_3 &= \operatorname{Im} z_2^2 = \operatorname{Im} \bar{u} = -\langle i, u \rangle &= -\sin \varphi \\
 x_0^2 + x_1^2 &= z_1 \bar{z}_1 &= z \bar{z} \\
 x_0 x_2 + x_1 x_3 &= \operatorname{Re} (z_1 \bar{z}_2) &= \operatorname{Re} z \\
 x_1 x_2 - x_0 x_3 &= \operatorname{Im} (z_1 \bar{z}_2) &= \operatorname{Im} z \\
 x_2^2 + x_3^2 &= z_2 \bar{z}_2 &= 1.
 \end{aligned} \tag{19}$$

wobei  $u := e^{i\varphi}$ .

In den Linienelementkoordinaten  $(z, u)$  hat nach (19) also jedes quadratische Richtungsfeld eine Gleichung der Form

$$\langle p(z), u \rangle - k(z) = 0, \tag{20}$$

wobei  $p$  ein quadratisches Polynom mit komplexen Koeffizienten in  $z$  ist, und  $k(z) = 0$  einen Kreis beschreibt. Ist  $|p(z)| < |k(z)|$ , so gibt es kein  $u$ , so dass  $(z, u)$  zu dem betrachteten Richtungsfeld gehört, ist  $|p(z)| > |k(z)|$ , so gibt es zwei solche  $u$ . Die Grenze des Gebietes der Möbiusebene, in dem Linienelemente des Richtungsfeldes verlaufen, ist gegeben durch

$$|\langle p(z), u \rangle|^2 = k^2(z). \tag{21}$$

(21) ist die Gleichung einer bizirkularen Quadrik  $\Gamma$ . In den nachfolgenden Beispielen, die besonders symmetrisch gewählt sind, zerfällt  $\Gamma$  meistens in Kreise.

U. Pinkall, Math. Institut Universität Freiburg i. Br.

(Fortsetzung im folgenden Heft)