

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 39 (1984)  
**Heft:** 1  
  
**Rubrik:** Aufgaben

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

le deuxième terme de la somme étant la probabilité d'intersection avec l'équateur. Le développement asymptotique est évidemment le même qu'au paragraphe 2.

E. Peter (Bern) und C. Tanasi (Palermo)

## BIBLIOGRAPHIE

- 1 C. Tanasi: Problèmes de probabilité géométrique sur la sphère unitaire. Boll. Un. Matem. Ital., 16-A, pp. 335–340 (1980).
- 2 E. Peter: 2 Wahrscheinlichkeitsprobleme auf der Sphäre. Lizentiatsarbeit. Bern, Mathematisches Institut (1981).
- 3 W. Gröbner et N. Hofreiter: Integraltafeln. Springer-Verlag, 1950.

© 1984 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/84/010010-07\$1.50 + 0.20/0

## Aufgaben

**Aufgabe 891.** Es sei  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  stetig und

$$\int_0^1 f(x) dx = 0.$$

Man zeige, dass

$$\left( \int_0^1 x^2 f(x) dx \right)^2 \leq \frac{1}{3} \int_0^1 x^2 (f(x))^2 dx.$$

Wann genau gilt das Gleichheitszeichen?

H.-J. Seiffert, Berlin, BRD

**Solution:** More generally, by applying the Cauchy-Bunyakovskii-Schwarz inequality  $(\int g h)^2 \leq (\int g^2) (\int h^2)$  to the case when  $g(x) = x f(x)$ ,  $h(x) = x$ , we obtain the given inequality for every Lebesgue integrable  $f$ , with equality if and only if  $\lambda x f(x) + \mu x = 0$  almost everywhere for some constants  $\lambda, \mu$  not both 0, i.e.  $f(x) = c$  almost everywhere for some constant  $c$ .

R. O. Davies, Leicester, GB

Weitere Lösungen sandten U. Abel (Giessen, BRD), K. Bickel (Nürtingen, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), Th. Egger (Appenzell), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), A. Makowski (Warschau, PL), V. D. Mascioni (Origlio), Chr. A. Meyer (Ittigen), I. Merényi (Cluj-Napoca, RU), Hj. Stocker (Wädenswil), W. Volgmann (Bochum, BRD), M. Vowe (Therwil), C. Wildhagen (Breda, NL), R. Wyss (Flumenthal).

**Aufgabe 892.** Für natürliche Zahlen  $n$  sei

$$a_n := \int_0^n \exp(t^2/n) dt.$$

Man ermittle  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}/a_n)$ .

U. Abel, Giessen, BRD

Lösung (von der Redaktion gekürzt): Es sei allgemeiner

$$a_n := \int_0^n \exp(C t^\alpha n^{-\beta}) dt \quad \text{mit} \quad C > 0, \alpha > \beta \geq 0.$$

Mit Hilfe der Substitution  $x = t n^{-\beta/\alpha}$  erhält man

$$a_n = n^{\beta/\alpha} \int_0^{n^{(\alpha-\beta)/\alpha}} \exp(C x^\alpha) dx.$$

Fasst man nun  $n$  als stetige Variable auf, so ergibt die Regel von Bernoulli-de l'Hospital

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}/a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^{\beta/\alpha} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \{C[(n+1)^{\alpha-\beta} - n^{\alpha-\beta}]\} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{wenn } \alpha < \beta + 1 \\ e^C, & \text{wenn } \alpha = \beta + 1 \\ \infty, & \text{wenn } \alpha > \beta + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

W. Janous, Innsbruck, A

Weitere Lösungen sandten U. Abel (Giessen, BRD), O. Buggisch (Darmstadt, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), R. O. Davies (Leicester, GB), U. Graf (La Neuveville), A. A. Jagers (Enschede, NL), L. Kuipers (Sierre), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), Kee-wai Lau (Hong-Kong), A. Makowski (Warschau, PL), V. D. Mascioni (Origlio), Chr. A. Meyer (Ittigen), I. Mérényi (Cluj-Napoca, RU), A. Müller (Zürich), Hj. Stocker (Wädenswil), C. Wildhagen (Breda, NL), R. Wyss (Flumenthal).

Eine eingesandte Lösung war falsch.

**Aufgabe 893.** Es sei  $p$  eine ungerade Primzahl,  $g$  eine Primitivwurzel mod  $p$ . Man zeige, dass für  $x \not\equiv 0 \pmod{p}$

$$\text{ind}_g x \equiv \sum_{i=1}^{p-2} (1 - g^i)^{p-2} x^i \pmod{p}.$$

Dabei bezeichnet  $\text{ind}_g x$  die kleinste der natürlichen Zahlen  $k$ , für die  $x \equiv g^k \pmod{p}$  erfüllt ist.

H. Bergmann, Hamburg, BRD

Solution: let  $k = \text{ind}_g(x)$ . Since  $\{g^i \mid 1 \leq i \leq p-2\} = \{2, 3, \dots, p-1\}$  it follows that  $\{1 - g^i \mid 1 \leq i \leq p-2\} = \{2, 3, \dots, p-1\}$ .

So

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{p-2} (1-g^i)^{p-2} x^i &= \sum_{i=1}^{p-2} (1-g^i)^{p-2} g^{ki} = \sum_{i=1}^{p-2} (1-g^i)^{p-2} (1-(1-g^i))^k \\
 &= \sum_{l=2}^{p-2} l^{p-2} (1-l)^k = \sum_{l=1}^{p-2} l^{p-2} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i l^i \\
 &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i \sum_{l=1}^{p-2} l^{i+p-2} \stackrel{*}{\equiv} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i (-\delta_{i,1}) = k = \text{ind}_g(x) \pmod{p}.
 \end{aligned}$$

Note that at \* we have made use of

$$\sum_{l=1}^{p-1} l^j = \sum_{i=0}^{p-2} g^{ij} = \begin{cases} \frac{g^{(p-1)j} - 1}{g^j - 1} \equiv 0 \pmod{p}, & \text{if } (p-1) \nmid j, \\ p-1 \equiv -1 \pmod{p}, & \text{if } (p-1) \mid j. \end{cases}$$

O. P. Lossers, Eindhoven, NL

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), H. Flanders (Boca Raton, USA), L. Kuipers (Sierre), V. D. Mascioni (Origlio).

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinschrift erbeten bis *10. August 1984* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44), Problem 862A (Band 36, S. 68), Problem 872A (Band 36, S. 175).

**Aufgabe 904.** Für beliebige  $x \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}_0$  werte man die Summe

$$S(x, n) := \sum_{i=0}^n \left\{ \binom{x+n+i}{i} 2^{-i} - \binom{x+n+i+1}{i} 2^{-i-1} \right\}$$

geschlossen aus.

L. Kuipers, Sierre

**Aufgabe 905.** Die Funktionen  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  seien stetig, und es gelte

$$\int_0^1 f(x) dx = 0.$$

Man zeige, dass

$$\left( \int_0^1 f(x) g(x) dx \right)^2 \leq \left\{ \int_0^1 (g(x))^2 dx - \left( \int_0^1 g(x) dx \right)^2 \right\} \int_0^1 (f(x))^2 dx.$$

Wann genau gilt Gleichheit?

U. Abel, Giessen, BRD

## Literaturüberschau

E. Scholz: Geschichte der Mannigfaltigkeitsbegriffe von Riemann bis Poincaré. 430 Seiten, Fr. 36.-. Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart 1980.

Dieses Buch wendet sich an historisch interessierte Mathematiker. Der Autor schildert darin den Ursprung, die Entwicklung und die Auswirkungen des Mannigfaltigkeitsbegriffs.

Im 19. Jahrhundert entwickelten sich aus der euklidischen Geometrie zwei gegensätzliche Richtungen, nämlich

1) die nichteuklidische Geometrie

2) geometrisierende Aspekte in der mehrdimensionalen Analysis; den scheinbaren Widerspruch löste Riemann im Mannigfaltigkeitsbegriff, der auf der Idee einer ausgedehnten Grösse basiert, die sich lokal einfach, global aber kompliziert verhält.

Dem Autor ist es gelungen, dem Leser die historischen und philosophischen Hintergründe für die Entstehung der allgemeinen Strukturbegriffe klarzumachen.

Im Hauptteil des Buches wird die Auswirkung des Mannigfaltigkeitsbegriffs auf die Gebiete Differentialgeometrie, komplexe Analysis (Riemannsche Fläche), Grundlagen der Geometrie, Topologie, projektive Geometrie und algebraische Topologie behandelt.

Das vorletzte Kapitel ist Poincaré gewidmet: Poincaré hatte eine konstruktive Fassung des Mannigfaltigkeitsbegriffs als Nullstellenmenge von Funktionen. Wie durch diese «Präzisierung» des Mannigfaltigkeitsbegriffs die topologische Theorie der Mannigfaltigkeiten entstand, wird vom Verfasser einleuchtend skizziert.

R. Klinger

A.I. Mees: Dynamics of Feedback Systems. X und 214 Seiten, US-\$ 39.50. John Wiley & Sons, New York 1981.

Das Buch baut auf einem «graduate course» auf, den der Autor seit 1976 in Cambridge gehalten hat. Der relativ informelle Stil führt schnell auf wesentliche Kernfragen und zeigt Zusammenhänge zwischen verschiedenen Methoden. Dynamische Systeme werden durch externe und interne Modelle, also durch Eingangs-Ausgangs-Beziehungen und durch Differentialgleichungen dargestellt. Beide Bereiche dienen zur Erklärung des Systemverhaltens, vor allem des nichtlinearen. Das Buch bringt klar die technischen Motivationen und Fragestellungen und die entsprechenden mathematischen Formulierungen zum Ausdruck. Es wendet sich an Regelungsingenieure und Mathematiker, die an einem Überblick über Gemeinsamkeiten und neuere Entwicklungen interessiert sind. In diesem Sinne kann es beiden Gruppen, z. B. als Grundlage für ein Seminarthema, sehr empfohlen werden.

G. Schweitzer