L'aiguille de Buffon sur la sphère

Autor(en): **Peter, E. / Tanasi, C.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **39 (1984)**

Heft 1

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-38012

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'aiguille de Buffon sur la sphère

0. Introduction

Nous étudions ici un problème analogue à celui de Buffon, avec la différence que le plan est remplacé par une sphère de rayon 1, la famille de droites par une famille de N méridiens équidistants et l'aiguille par un arc de grand cercle dont la longueur, mesurée en radians, sera appelée L ($L < \pi$). Nous cherchons la probabilité $P(N, L)$ pour que l'aiguille coupe un méridien, sachant que le point milieu de l'aiguille et l'angle qu'elle forme avec une direction fixe sont uniformément répartis, l'un sur la sphère, l'autre dans $[0, \pi)$. Il s'agit d'une généralisation des résultats de [1].

1. Formules exactes

Nous admettons que P, le point milieu de l'aiguille, se trouve entre les méridiens voisins g_1 et g_2. La position de l'aiguille S est alors déterminée par les paramètres suivants (Fig. 1):

ϱ: la longueur de l'arc OP (O est le «pôle nord»)
θ: l'angle de g_1 avec OP ($0 \leqq \theta < \beta_N = 2\pi/N$)
v: l'angle de l'aiguille avec OP ($0 \leqq v < \pi$)

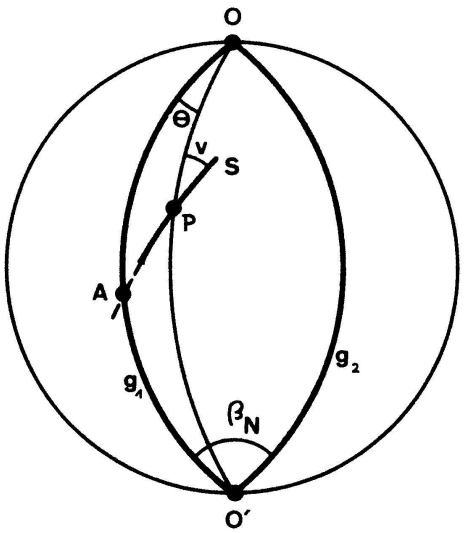

Fig. 1

Lemme 1.1: Supposons que S ne coupe pas g_1 et soit A l'intersection du prolongement de S avec g_1. Pour un v donné, satisfaisant

a) $\sin v \leqq \sin \frac{\beta_N}{2} \Big/ \sin \frac{L}{2}$,

θ atteint sa valeur minimum θ_1 lorsque

b) $\overline{PA} = \frac{L}{2}$ et c) $\overline{AO} = \frac{\pi}{2}$.

Cette valeur de θ_1 est donnée par

$$\sin\theta_1 = \sin v \cdot \sin\frac{L}{2}. \tag{1.1}$$

Preuve: Nous avons dans le triangle sphérique OAP:

$$\sin\theta = \sin v \frac{\sin\overline{PA}}{\sin\overline{AO}}. \tag{1.2}$$

Si l'on suppose $\overline{PA} \geqq L/2$, on voit immédiatement que l'expression de droite dans (1.2) est minimale pour $\overline{PA} = L/2$ et $\overline{AO} = \pi/2$. La condition $\theta \leqq \beta_N/2$ (g_1 est le plus proche voisin de OP) implique en outre

$$\sin v \leqq \sin\frac{\beta_N}{2} \cdot \frac{\sin\overline{AO}}{\sin\overline{PA}} \leqq \sin\frac{\beta_N}{2} \cdot \frac{1}{\sin L/2}.$$

En posant $\theta_2 = \theta_2(v) = \beta_N - \theta_1(v)$, θ_1 donné par (1.1), on obtient donc la condition

$$\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2. \tag{1.3}$$

En supposant que v satisfait a) et que θ satisfait (1.3), nous allons maintenant déterminer les valeurs admissibles de ϱ. Dans le cas limite où S touche g_1 en A, on a

$$\cos\varrho_1 = \cos\overline{AO} \cdot \cos\frac{L}{2} + \sin\overline{AO}\ \sin\frac{L}{2}\cos\widehat{OAP}. \tag{1.4}$$

On obtient $\sin\overline{AO}$ à partir de (1.2) et

$$\cos\widehat{OAP} = \cos\theta\cos v + \sin\theta\sin v\cos\varrho_1, \tag{1.5}$$

$$\varrho_1 = \arccos\left[\frac{\sin v\cos v\cos\theta\sin^2(L/2) + \Delta\cos(L/2)}{F^2\sin\theta}\right] = \varrho_1(v, \theta)$$

où

$$\Delta^2 = \sin^2\theta - \sin^2 v\sin^2\frac{L}{2} \geqq 0, \tag{1.6}$$

et

$$F^2 = 1 - \sin^2 v \cdot \sin^2\frac{L}{2}.$$

Pour l'autre valeur limite on obtient

$$\varrho_2 = \arccos\left[\frac{\sin v \cos v \cos\theta \sin^2(L/2) - \Delta\cos(L/2)}{F^2 \sin\theta}\right] = \varrho_2(v,\theta)\,. \tag{1.7}$$

Les cas où S touche g_2 donnent pour leur part les valeurs limites:

$$\varrho_1' = \pi - \varrho_2(v, \beta_N - \theta)\,, \qquad \varrho_2' = \pi - \varrho_1(v, \beta_N - \theta)\,. \tag{1.8}$$

En posant $R_1 = \max(\varrho_1, \varrho_1')$ et $R_2 = \min(\varrho_2, \varrho_2')$, on aboutit donc à la condition

$$R_1 \leqq \varrho \leqq R_2\,. \tag{1.9}$$

Le cas $R_1 > R_2$ est possible. Cela signifie que l'aiguille coupe toujours g_1 ou g_2 pour les valeurs correspondantes de v et θ. Pour obtenir la probabilité de l'événement E: «S ne coupe pas de méridien», il faut donc intégrer sur le domaine ainsi limité la mesure

$$d\mu = |\sin\varrho|\, d\varrho\, d\theta\, dv\,.$$

Nous poserons encore, en tenant compte de a),

$$\tilde{v} = \arcsin\left[\sin\frac{\beta_N}{2} \Big/ \sin\frac{L}{2}\right]$$

lorsque $\beta_N \leqq L$ et $\tilde{v} = \pi/2$ sinon. Nous obtenons alors en ne considérant par raison de symétrie que le cas $0 \leqq \theta \leqq \beta_N/2$ et $0 \leqq v < \pi/2$:

$$\mu(E) = 4\int_0^{\tilde{v}}\int_{\theta_1}^{\beta_N/2} \max(0, \cos R_1 - \cos R_2)\, d\theta\, dv \tag{1.10}$$

$$P(N,L) = 1 - \frac{\mu(E)\cdot N}{4\pi^2}\,. \tag{1.11}$$

($\tilde{v}$ défini ci-dessus, θ_1 par 1.1), $R_1 = \max(\varrho_1, \varrho_1')$, $R_2 = \min(\varrho_2, \varrho_2')$, $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_1'$ et ϱ_2' selon (1.6), (1.7) et (1.8).

2. Formules asymptotiques

Si $N \to \infty$ et $L \to 0$ de telle sorte que β_N/L tende vers une valeur fixe $k\,(NL \to 2\pi/k)$, nous allons montrer que $P(N,L)$ tend vers une limite (qui dépend de k). Le fuseau peut être considéré comme plan dans un entourage infinitésimal de P, et notre problème devient donc à la limite équivalent à un problème plan, dans lequel l'aiguille est droite, et la surface sur laquelle elle

est jetée est décrite par la Fig. 2, dans laquelle la longueur OO' est π, et la distance entre les bords est égale à celle mesurée sur la sphère entre les méridiens à la hauteur correspondante.

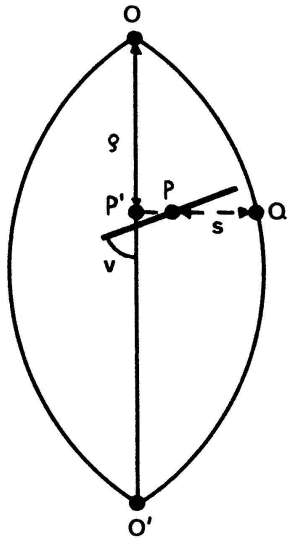

Fig. 2

La position de S peut être dans ce cas déterminée par les paramètres suivants (Fig. 2):

ϱ: La distance de O à la projection P' de P sur OO'
v: l'angle de S avec OO', le méridien milieu
s: la distance de P à Q, intersection de PP' avec le méridien le plus proche de P.

Nous allons montrer que, pour une valeur donnée ϱ_0 de la variable aléatoire ϱ, la probabilité conditionnelle d'intersection est voisine de la probabilité calculée pour une aiguille classique de Buffon de longueur 1, jetée sur une famille de parallèles espacées de $k \sin \varrho_0$ ou, ce qui revient au même, une aiguille de longueur L avec des espaces de $k L \sin \varrho_0$.

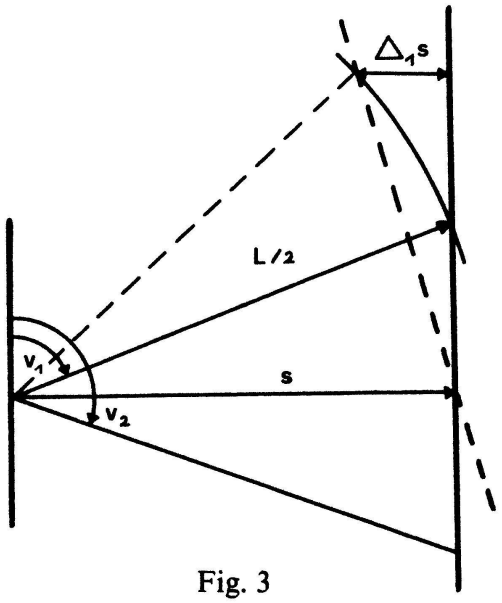

Fig. 3

En effet, les valeurs limites v_1 et v_2 pour l'angle v sont, dans le problème classique (Fig. 3) et pour $s \leqq L/2$:

$$v_1 = \arcsin \frac{2s}{L}, \qquad v_2 = \pi - v_1$$

(nous posons $v_1 = v_2 = \pi/2$ pour $s > L/2$).
Dans le problème du fuseau plan on obtient des valeurs de la forme

$$v_1' = \arcsin \frac{2(s - \Delta_1 s)}{L}, \qquad v_2' = \arcsin \frac{2(s + \Delta_2 s)}{L},$$

où $\Delta_1 s/L$ et $\Delta_2 s/L$ tendent vers O avec L, quelles que soient les valeurs de ϱ_0 et de s (à l'exception des valeurs extrêmes, que l'on peut négliger). Sachant que, pour ϱ_0 donné, s/L a une répartition uniforme sur l'intervalle $(0, k \sin \varrho_0/2)$, nous obtenons pour la probabilité d'intersection dans le cas du fuseau plan $Q'(\varrho_0)$:

$$Q'(\varrho_0) = \left(\frac{\pi \sin \varrho_0}{N}\right)^{-1} \int_0^{\pi \sin \varrho_0/N} \frac{v_2' - v_1'}{\pi} \, ds \tag{2.1}$$

et l'on voit, en faisant la transformation $t = 2s/L = kNs/\pi$ et en utilisant la continuité de la fonction arc sin, que ceci tend vers

$$Q(\varrho_0) = (k \sin \varrho_0)^{-1} \int_0^{k \sin \varrho_0} \frac{v_2 - v_1}{\pi} \, dt \tag{2.2}$$

avec $v_1 = \pi - v_2 = \arcsin t$ pour $t \leqq 1$ et $v_1 = v_2 = \pi/2$ pour $t > 1$. En remarquant que la fonction de densité de ϱ sur $[0, \pi]$ est $1/2 \sin \varrho$, on trouve à partir de (2.2) la valeur limite de $P(N, L)$ sous la forme $\varphi(k)$ avec

$$\begin{aligned} \varphi(k) &= 1 + \frac{1}{k} - \frac{2}{\pi k} \int_0^{\pi/2} f(k \sin \varrho) \, d\varrho \qquad (k \leqq 1) \\ \varphi(k) &= 1 + \frac{1}{k} - \frac{\sqrt{k^2 - 1}}{k} - \frac{2}{\pi k} \int_0^{\arcsin 1/k} f(k \sin \varrho) \, d\varrho \qquad (k > 1) \end{aligned} \tag{2.3}$$

où $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$.
En intégrant par parties, on obtient (p. ex. dans le cas $k > 1$):

$$\varphi(k) = -\frac{\pi}{2} \sqrt{k^2 - 1} + k^2 \int_0^{\arcsin 1/k} \frac{\cos^2 \varrho}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varrho}} \, d\varrho + \int_0^{\arcsin 1/k} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varrho} \, d\varrho .$$

En écrivant $k^2 \cos^2 \varrho = (k^2 - 1) + (1 - k^2 \sin^2 \varrho)$, en posant $k \sin \varrho = \sin u$ et $k^{-1} = h$, puis en transformant $h^2 \cos^2 u$ comme plus haut, on se ramène aux intégrales elliptiques

$$E(h) = \int_0^{\pi/2} (1 - h^2 \sin^2 \varrho)^{1/2} \, d\varrho, \qquad F(h) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varrho}{(1 - h^2 \sin^2 \varrho)^{1/2}} \tag{2.4}$$

Il faut alors utiliser (cf. [3], p. 40):

$$E(h) = \frac{1+h}{2} E(h') + \frac{1-h}{2} F(h'),$$

$$F(h) = \frac{1}{1+h} F(h')$$

où

$$h' = \frac{2\sqrt{h}}{1+h},$$

pour arriver, comme dans le cas plus simple $k \leqq 1$, au.

Théorème: *La valeur limite de $P(N,L)$ lorsque $N \to \infty$, $L \to 0$, $NL \to 2\pi/k$ est de la forme $\varphi(k)$ avec*

$$\varphi(k) = 1 + \frac{1}{k} - \frac{2(1+k)}{\pi k} E\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right).$$

Les tabelles ci-dessous donnent quelques valeurs de $P(N,L)$ et de $\varphi(k)$.

Tableau I: Valeurs exactes de $P(N,L)$

$L \backslash N$	2	3	4	6	8	10
20°	.112	.166	.217	.313	.403	.485
40°	.222	.326	.419	.580	.707	.786
60°	.333	.483	.606	.782	.850	.884
80°	.444	.632	.768	.878	.913	.932
120°	.666	.891	.938	.964	.974	.980
150°	.833	.976	.986	.992	.994	.995

Tableau II: Valeurs asymptotiques $\varphi(k)$

k	.2	.4	.6	.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	3	4	10
$\varphi(k)$	.9499	.8990	.8463	.7902	.7268	.6503	.5820	.5247	.4768	.4365	.3054	.2343	.0975

Remarque: On peut modifier le problème en remplaçant la famille des fuseaux par une famille de triangles sphériques isocèles dont l'un des sommets se trouve au pôle nord ou au pôle sud, l'angle étant toujours β_N, et le côté opposé sur l'équateur. Si l'on appelle $P(N,L)$ la probabilité d'intersection dans le cas des N fuseaux et $P_1(N,L)$ la probabilité correspondante dans le cas des $2N$ triangles isocèles, on a immédiatement l'estimation

$$P(N,L) \leqq P_1(N,L) \leqq P(N,L) + P(2,L),$$

le deuxième terme de la somme étant la probabilité d'intersection avec l'équateur. Le développement asymptotique est évidemment le même qu'au paragraphe 2.

E. Peter (Bern) und C. Tanasi (Palermo)

BIBLIOGRAPHIE

1 C. Tanasi: Problèmes de probabilité géometrique sur la sphère unitaire. Boll. Un. Matem. Ital., 16-A, pp. 335–340 (1980).
2 E. Peter: 2 Wahrscheinlichkeitsprobleme auf der Sphäre. Lizentiatsarbeit. Bern, Mathematisches Institut (1981).
3 W. Gröbner et N. Hofreiter: Integraltafeln. Springer-Verlag, 1950.

© 1984 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/84/010010-07$1.50+0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 891. Es sei $f: [0, 1] \to \mathbf{R}$ stetig und

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 0 .$$

Man zeige, dass

$$\left(\int_0^1 x^2 f(x)\, dx\right)^2 \leqq \frac{1}{3} \int_0^1 x^2 (f(x))^2 dx .$$

Wann genau gilt das Gleichheitszeichen?

H.-J. Seiffert, Berlin, BRD

Solution: More generally, by applying the Cauchy-Bunyakovskii-Schwarz inequality $(\int g\, h)^2 \leqq (\int g^2)\,(\int h^2)$ to the case when $g(x) = x f(x)$, $h(x) = x$, we obtain the given inequality for every Lebesgue integrable f, with equality if and only if $\lambda x f(x) + \mu x = 0$ almost everywhere for some constants λ, μ not both 0, i.e. $f(x) = c$ almost everywhere for some constant c.

R. O. Davies, Leicester, GB

Weitere Lösungen sandten U. Abel (Giessen, BRD), K. Bickel (Nürtingen, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), Th. Egger (Appenzell), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), A. Makowski (Warschau, PL), V. D. Mascioni (Origlio), Chr. A. Meyer (Ittigen), I. Merényi (Cluy-Napoca, RU), Hj. Stocker (Wädenswil), W. Volgmann (Bochum, BRD), M. Vowe (Therwil), C. Wildhagen (Breda, NL), R. Wyss (Flumenthal).