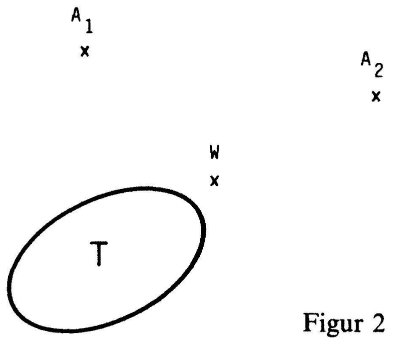
Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 39 (1984)
Heft: 6

Rubrik: Aufgaben



Figur 2

an, dass das Problem beträchtlich komplizierter sein wird als die entsprechende Zwei-Spieler-Version ([1], Beispiel 1.9.2. Für eine strenge Lösung vergleiche man [2]). Darüber hinaus dürfte auch das sukzessive Einfangen der Angreifer im Falle, dass W gewinnt, dann nicht ganz einfach sein, wenn diese zu Beginn nahe beieinander sind. Dies wird nahegelegt durch das Spiel «Point capture of two evaders in succession» [3].

Klaus Thews, Unterhaching

LITERATURVERZEICHNIS

1 R. Isaacs: Differential Games. Wiley, New York 1965.
2 A. Friedman: Differential Games. Wiley, New York 1971.
3 J.V. Breakwell und P. Hagedorn: Point capture of two evaders in succession. J. Optim. Theory Applic. *27/1* (1979).

 0013-6018/84/060149-06$1.50 + 0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 902. Give a proof for the following generalisation of Aufgabe 890: Let h_i and $m_i (i = 0, \ldots, n; n \geq 3)$ be the heights and the medians of an n-dimensional simplex, respectively, and let V be its volume. Then

$$V^{-1}\left(\sum_{i=0}^{n} h_i\right)\left(\sum_{i=0}^{n} m_i^{n-1}\right) \geq n!(n+1)^{(n+3)/2} n^{-n/2}$$

with equality if and only if the simplex is regular.

M.S. Klamkin, Edmonton, Canada

Solution by the proposer: We use the following known results:

$$\sum_{i=0}^{n} m_i^{n-1}/(n+1) \geq \left(\sum_{i=0}^{n} m_i^2/(n+1)\right)^{(n-1)/2}, \tag{1}$$

$$\sum_{i=0}^{n} m_i^2 = (n+1) n^{-2} \sum_{i<j} a_{ij}^2 \tag{2}$$

(a_{ij} = length of edge of simplex between vertices i and j),

$$h_i = nV/F_i \tag{3}$$

(F_i = content of face opposite vertex i),
and the result of Aufgabe 629A (El. Math. *27*, 14, 1972):

$$F_i \leqslant p_i^{2/n}\, n^{1/2}\, 2^{(1-n)/2}/(n-1)!\,, \tag{4}$$

where p_i is the product of all the edges of the face opposite vertex i. Using (3), (4) and the A.M.-G.M. Inequality, we get

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} h_i/V &= n\sum_{i=0}^{n} F_i^{-1} \geqslant n(n+1)\prod_{i=0}^{n} F_i^{-1/(n+1)}\\ &\geqslant n!\,(n+1)\,n^{-1/2}\,2^{(n-1)/2}\prod_{i=0}^{n} p_i^{-2/n(n+1)}\\ &= n!\,(n+1)\,n^{-1/2}\,2^{(n-1)/2}\prod_{\substack{i=0\\ i<j}}^{n} a_{ij}^{2(1-n)/n(n+1)}.\end{aligned} \tag{5}$$

Using (1), (2) and the A.M.-G.M. Inequality we obtain

$$\sum_{i=0}^{n} m_i^{n-1} \geqslant (n+1)\,n^{1-n}\,[n(n+1)/2]^{(n-1)/2}\prod_{i<j} a_{ij}^{\,2(n-1)/n(n+1)}. \tag{6}$$

Then (5) and (6) lead to the desired result with equality if and only if the simplex is regular.

REFERENCES

1 F. Leuenberger: Extremaleigenschaften der Summe der wichtigsten Ecktransversalen des n-dimensionalen Simplex. El. Math. *15*, 81–82 (1960).
2 J. Schopp: Simplexungleichungen. El. Math. *16*, 13–16 (1961).

Eine weitere Lösung sandte Hj. Stocker (Wädenswil).

Aufgabe 903. Eine Ellipse E habe folgende Eigenschaft: Es gibt eine endliche Folge $(E_i)_{1\le i\le n}$ von E einbeschriebenen und zu E ähnlichen Ellipsen derart, dass E_1 und E_n die Ellipse E in deren Hauptscheiteln hyperoskulieren, während jede der übrigen E_i ihre beiden Nachbarn E_{i-1}, E_{i+1} in ihren Nebenscheiteln und E in zwei Punkten berührt. Man bestimme die numerische Exzentrizität von E. C. Bindschedler, Küsnacht

Lösung: E^* sei jenes bezüglich der grossen Achse normalaffine Bild von E, bei welchem die einbeschriebenen Ellipsen speziell Kreise und E_1^* und E_n^* insbesondere die Hauptscheitelkrümmungskreise von E^* sind. Gemäss Aufgabe 436 (El. Math. *18*, Nr. 5, (1963) p. 114–115) hat E^* die numerische Exzentrizität $\varepsilon^* = \cos(\pi/2n)$. Weist E das Achsenverhältnis λ auf, so E^* das Verhältnis $\lambda^* = \lambda^2$. Eine einfache Rechnung ergibt daher für die gesuchte numerische Exzentrizität den Wert:

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \sin(\pi/2n)}.$$

Hj. Stocker, Wädenswil ZH

Hj. Stocker (Wädenswil) sandte eine 2. Lösung. Teillösungen gingen ein von H. Flanders (Boca Raton, USA) und L. Kuipers (Sierre).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Juni 1985* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44), Problem 862A (Band 36, S. 68).

Aufgabe 914. Man bestimme für beliebiges $n \in \mathbf{N}$ die Mächtigkeit der Menge

$$A_n := \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{Z}^n | 0 \leqslant x_i \leqslant i \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = n \right\}.$$

W. Janous, Innsbruck, A

Aufgabe 915. Für $n \in \mathbf{Z}$ bezeichne $f_n : \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ eine multiplikative arithmetische Funktion mit folgender Eigenschaft: Für alle Primzahlen p und alle Exponenten $k \in \mathbf{N}$ gilt

$$f_n(p^k) = \binom{n}{k}.$$

Man bestimme die Konvergenzabszisse sowie die Summe der Dirichletschen Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_n(k) k^{-s}.$$

V. D. Mascioni, Origlio

Aufgabe 916. Es bezeichnen a, b, c die Seiten, r_a, r_b, r_c die Ankreisradien, $2s$ den Umfang und r den Inkreisradius eines ebenen Dreiecks. Ferner sei

$$S := \frac{r_b + r_c}{b + c} + \frac{r_c + r_a}{c + a} + \frac{r_a + r_b}{a + b}.$$

Man schätze S nach unten sowie rS/s nach oben bestmöglich ab.

D. M. Milošević, Pranjani, YU