

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 39 (1984)
Heft: 6

Artikel: Schutz eines Intervalles vor zwei Angreifern : ein einfaches
Differentialspiel
Autor: Thews, Klaus
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-38026>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 26.03.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Didaktik und Elementarmathematik

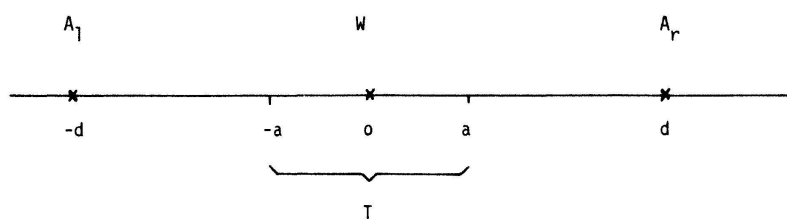
Schutz eines Intervalles vor zwei Angreifern – ein einfaches Differentialspiel

1. Einleitung

Einige anschauliche Differentialspiele wie das Spiel «Verteidigung eines Ziels» ([1], Beispiel 1.9.2) oder «Zwei Verfolger und ein flüchtiges Schiff» ([1], Beispiel 6.8.3) sind elementaren Lösungsmethoden zugänglich, meist geometrischer Natur. An dieser Stelle wird ein weiteres Beispiel dieser Art vorgestellt, nämlich der Schutz eines Intervalles vor zwei Angreifern. Dies ist ein Spiel auf der reellen Achse mit drei Teilnehmern, kann aber als Zweipersonen-Spiel betrachtet werden, weil zwei Spieler eine dauernde Koalition eingehen. Gelöst wird es durch die explizite Angabe von Gewinnstrategien. Das zweidimensionale Analogon scheint zu seiner vollständigen Lösung tieferliegende Methoden aus der Theorie der Differentialspiele zu erfordern und wird als offenes Problem formuliert.

2. Das Problem

Ein Wächter W und zwei Angreifer, der linke A_l und der rechte A_r , bewegen sich auf der reellen Achse R . Zu Beginn des Spiels befindet sich W in $x = 0$, A_l in $x = -d$, A_r in $x = d$, $d > 0$. Beide Angreifer kooperieren und setzen sich zum Ziel, dass wenigstens einer von ihnen das abgeschlossene Intervall $T = [-a, a]$ betritt, $0 < a < d$. Auf der anderen Seite versucht W die Eindringlinge A_l, A_r am Betreten der Zielmenge T zu hindern. W gewinnt das Spiel genau dann, wenn er dies schafft. Ein Angreifer scheidet



Figur 1

aus dem Spiel aus, wenn er von W berührt wird. (Im Grenzfall, wenn W und ein Angreifer gleichzeitig den Rand von T erreichen, betrachten wir dies als Fehlschlag für den betreffenden Angreifer.) Wir gehen davon aus, dass die Spieler im Verlaufe des Spiels alle momentanen Positionen kennen, ebenso sollen die maximalen Geschwindigkeiten v_w von W und v von A_l und A_r bekannt sein. In jedem Augenblick wählen die Spieler ihre Geschwindigkeiten (die die Grenzen v_w bzw. v nicht überschreiten) in Abhängigkeit von den aktuellen Positionen. Richtungswechsel der Bewegung seien verzugslos möglich.

Die Frage lautet: Wer gewinnt das Spiel und wie?

3. Eine mathematisch strenge Formulierung

Die Wahl der Geschwindigkeiten in jedem Moment bedarf einer Klärung. Daher wird hier eine Präzisierung vorgenommen.

Für $\Delta t > 0$ definieren wir eine Δt -diskrete Version obigen Spiels wie folgt: Wir betrachten eine äquidistante Unterteilung $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$ der nichtnegativen reellen Zeitachse. In jedem Zeitpunkt $t = k\Delta t, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ wählen die Spieler eine zulässige Geschwindigkeit, die in $[k\Delta t, (k+1)\Delta t)$ konstant ist und von den Orten x_w, x_r und x_l von W, A_r und A_l bei $t = k\Delta t$ abhängt. Dadurch ist die Bewegung eindeutig bestimmt. Wir sagen, W berührt A_j und fängt ihn damit, wenn $|x_w - x_j| \leq 2v_w\Delta t, j \in \{l, r\}$. (Diese etwas willkürlich erscheinende Definition ist in Verbindung mit der getroffenen Konvention zu sehen, ein Angreifer müsse zum Erfolg das Ziel T strikt vor W erreichen.)
Betreffend das ursprüngliche Spiel definieren wir: W bzw. A_l, A_r gewinnt das Spiel, wenn W bzw. A_l, A_r das Δt -diskrete Spiel für alle hinreichend kleinen Δt gewinnt.

4. Das Ergebnis

$$\text{Sei } e = 2d/(v_w - v) + a/v_w - (d - a)/v. \quad (1)$$

Ist $e > 0$, dann gewinnen A_l und A_r das Spiel, ist $e \leq 0$, so hat W eine Gewinnstrategie. Wie in 5.1 ausgeführt wird, kann e interpretiert werden z. B. als Zeitvorsprung von A_r vor W beim Erreichen von $x = a$, wenn W zunächst A_l fängt und dann $x = a$ ansteuert.

5. Beweis

5.1 Der Fall $e \leq 0$

Die einfache Gewinnstrategie für W besteht darin, zunächst einen beliebigen Angreifer zu fangen und dann den anderen.

Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, dass alle Spieler ihre Maximalgeschwindigkeiten nutzen. Wenn W A_l fängt und A_l sich nach links bewegt, dann ist die Zeit, erforderlich um A_l zu fangen, umzukehren und $x = a$ zu erreichen $t = 2d/(v_w - v) + a/v_w$. Die Bedingung $e \leq 0$ impliziert dann, dass W $x = a$ wenigstens gleichzeitig mit A_r erreicht, wenn A_r von Anfang an nach links läuft.

Anmerkung: Das Resultat 4 besagt daher, dass W genau dann gewinnen kann, wenn seine aggressive Strategie Erfolg hat.

5.2 Der Fall $e > 0$

Wir werden eine Gewinnstrategie für A_l und A_r angeben. Zunächst sind einige Definitionen angebracht.

Zu jedem Zeitpunkt des Spiels sei $T_l(T_r)$ der Zeitvorsprung von $A_r(A_l)$ beim Erreichen von $x = a$ ($x = -a$), vorausgesetzt W fängt $A_l(A_r)$ und bewegt sich dann nach $x = a$ ($x = -a$). A_l und A_r bewegen sich dabei nach links (rechts), alle mit höchstem Tempo. Es gelten die Beziehungen

$$T_l = 2(x_w - x_l)/(v_w - v) + (a - x_w)/v_w - (x_r - a)/v, \quad (2)$$

und

$$T_r = 2(x_r - x_w)/(v_w - v) + (x_w + a)/v_w + (a + x_l)/v. \quad (3)$$

Sei ferner $V_r(V_l)$ der Zeitvorsprung von W vor $A_r(A_l)$ beim Erreichen von $x = a$ ($x = -a$), vorausgesetzt beide laufen auf diese Stelle zu. Offensichtlich gelten die Formeln

$$V_r = (x_r - a)/v - (a - x_w)/v_w, \quad (4)$$

und

$$V_l = (-a - x_l)/v - (x_w + a)/v_w. \quad (5)$$

Definiere α wie folgt: Für $v_w \leq 3v$ sei $\alpha = 2(a/v_w + a/v)$ und sonst $\alpha = 2e$.

Wir argumentieren im Rahmen eines Δt -diskreten Spiels. Δt ist dabei als klein vorausgesetzt, genauere Forderungen werden im Beweis deutlich. Wähle $\varepsilon > 0$ mit $\alpha > 3\varepsilon$. Folgende Strategie wird sich als Gewinnstrategie für die Angreifer erweisen: A_l und A_r nutzen ständig die Höchstgeschwindigkeit v .

- i) Ist $V_r < 0$ ($V_l < 0$), dann läuft $A_r(A_l)$ direkt aufs Ziel zu. Im Falle, dass noch beide Angreifer im Spiel sind und $V_l, V_r \geq 0$ gilt, werden folgende Vorschriften beachtet:
- ii) Falls $\min\{T_l, T_r\} > \varepsilon$, bewegen sich A_l und A_r aufs Ziel zu.
- iii) Falls $T_r \leq \varepsilon$ ($T_l \leq \varepsilon$), so bewegen sich A_r und A_l nach rechts (links).

Anmerkung: Im wesentlichen legen diese Regeln eine Kontraktionsstrategie fest, die die Nebenbedingung respektiert, dass das sukzessive Einfangen der Angreifer durch W nicht möglich ist. Der Abstand $|x_r - x_l|$ ist eine nichtwachsende Funktion der Zeit. Jetzt zeigen wir, dass obige Strategie erfolgreich ist. Lemma 1 erklärt die Bedeutung von α und impliziert, dass im Falle iii nur entweder $T_r < \varepsilon$ oder $T_l < \varepsilon$ gilt. Im weiteren Beweis nehmen wir immer an, A_l und A_r verwenden die erläuterte Kontraktionsstrategie.

Lemma 1. *Solange beide Angreifer aktiv sind, gilt die Ungleichung*

$$T_r + T_l \geq \alpha.$$

Dies bedeutet, dass die Summe der Vorsprünge des linken und rechten Angreifers immer positiv erhalten bleibt.

Beweis: a) $v_w \leq 3v$: Daraus folgt $(v_w - v) \leq 2v$ und $1/2v \leq 1/(v_w - v)$. Daher erhält man

$$\begin{aligned} T_l + T_r &= 2(x_r - x_l)/(v_w - v) + 2a/v_w + 2a/v + (x_l - v_r)/v \\ &\geq 2(x_r - x_l)/2v + 2a/v_w + 2a/v + (x_l - x_r)/v \\ &\geq 2a/v_w + 2a/v. \end{aligned}$$

b) $v_w > 3v$: In diesem Fall betrachten wir $T_l + T_r$ als Funktion der Zeit, wobei wir wissen, dass $T_l(0) + T_r(0) = 2e > 0$ gilt. Sei $t = k\Delta t$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dann haben W , A_l und A_r konstante Geschwindigkeiten w , v_l und v_r im Zeitintervall $[t, t + \Delta t)$. Folglich gilt

$$T_l(t + \Delta t) + T_r(t + \Delta t) = T_l(t) + T_r(t) + \Delta t(2v_r(v_w - v) + v_l/v - 2v_l/(v_w - v) - v_r/v). \quad (6)$$

Gilt $v_l = v$, (entspricht Fall iii), dann bleibt $T_l + T_r$ konstant. Andernfalls (Fall ii) gilt $v_l = v$ und $v_r = -v$ und der Klammerausdruck in (6) wird zu $2 - 4v/(v_w - v) \geq 2 - 4v/2v = 0$. Deshalb ist $T_l + T_r$ eine nichtfallende Funktion und $T_l + T_r \geq 2e$.

Das nächste Lemma zeigt, dass die Strategie des sukzessiven Einfangens für W keinen Erfolg verspricht.

Lemma 2. *Solange beide Angreifer im Spiel sind, gilt die Relation*

$$\min\{T_l, T_r\} \geq \varepsilon/2.$$

Beweis: Sei $t = k\Delta t$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und seien w, v_l, v_r die konstanten Geschwindigkeiten von W , A_l und A_r in $[t, t + \Delta t)$. Wir argumentieren am Beispiel von T_l , für T_r gilt die analoge Beweisführung.

$$T_l(t + \Delta t) = T_l(t) + \Delta t(2w/(v_w - v) - w/v_w - 2v_l/(v_w - v) - v_r/v) = T_l(t) + \Delta t(2(w - v_l)/(v_w - v) - w/v_w - v_r/v). \quad (7)$$

Man beachte, dass der Multiplikand von Δt in (7) als Funktion von w wachsend ist.

Ist $T_l(t) > \varepsilon$, dann gilt $v_l = v$, $v_r = -v$ und somit

$$T_l(t + \Delta t) \geq \varepsilon + \Delta t(2(-v_w - v)/(v_w - v) + 2) \text{ sowie}$$

$$T_l(t + \Delta t) \geq \varepsilon - \Delta t(4v/(v_w - v)). \text{ Da } \Delta t \text{ als klein vorausgesetzt wurde, folgt}$$

$$T_l(t + \Delta t) \geq \varepsilon/2. \text{ Sei nun } \varepsilon > T_l(t) \geq \varepsilon/2. \text{ Dann liegt Fall iii vor und } v_l = -v, v_r = -v.$$

$$\text{Es folgt } T_l(t + \Delta t) \geq T_l(t) + \Delta t(2(-v_w + v)/(v_w - v) + 2)$$

$$\text{und } T_l(t + \Delta t) \geq T_l(t) \geq \varepsilon/2.$$

Nach diesen Vorbereitungen schliessen wir wie folgt. Fängt W einen Angreifer im Verlaufe des Spiels, z. B. A_r , dann ist nach Lemma 2 T_r positiv. In diesem Augenblick des Fangens gilt jedoch $T_r = -V_l$ (vgl. Formeln (3) und (5)) und deshalb wird A_l $x = -a$ vor W erreichen.

Es verbleibt die Aufgabe, eine obere Schranke für die Dauer der Spielphase herzuleiten, in der noch beide Angreifer da sind. Sei S die Gesamtzeit seit Spielbeginn, für die

$$\min\{T_r, T_l\} > \varepsilon \text{ gilt. Genauer sei für } t_k = k\Delta t \text{ } S(t_k) = \left(\sum_{j=0}^{k-1} f(j) \right) \Delta t, \text{ wobei } f(j) = 1, \text{ falls}$$

$$\min\{T_r(j\Delta t), T_l(j\Delta t)\} > \varepsilon \text{ und } f(j) = 0 \text{ sonst.}$$

Da der Abstand der Eindringlinge $|x_l - x_r|$ mit Geschwindigkeit $2v$ schrumpft, solange $\min\{T_r(t), T_l(t)\} > \varepsilon$ gilt, kann S nicht die Schranke $S_B = (d - a)/v$ überschreiten. Andernfalls wäre $|x_l - x_r| < 2a$, und das Spiel hätte vorher geendet.

Seien $\tau_1 = 2(d - a)/v$ und $\tau_2 = (\alpha - 3\varepsilon)(v_w - v)/4v$. Es folgt

Lemma 3. *Wenn beide Angreifer im Spiel sind, kann die Spieldauer die Schranke $\tau_B = (S_B/\tau_2 + 2)\tau_1$ nicht übersteigen.*

Beweis: Es reicht zu zeigen, dass zur Zeit τ_B $S \geq S_B$ gilt.

Da $|x_l - x_r|$ nicht wächst, ist τ_1 die maximale Zeit, die ein Angreifer braucht, um das Ziel T zu erreichen, wenn er darauf zu läuft. Sei $t = k\Delta t$ irgendein Zeitpunkt, zu dem $\min\{T_l, T_r\} \leq \varepsilon$ (ein solcher wird spätestens bei τ_1 erreicht). Dann gibt es innerhalb des Intervalles $(t, t + \tau_1)$ eine Gesamtzeit von τ_2 , in der $\min\{T_l, T_r\} > \varepsilon$ gilt und somit der Abstand $|x_l - x_r|$ schrumpft. Dies sieht man wie folgt: Sei o. E. $T_l \leq \varepsilon$ zur Zeit t . Beide Angreifer bewegen sich dann nach links. Da A_r höchstens die Zeit τ_1 braucht, um $x = a$ zu erreichen, muss W die Grösse T_r auf ε erniedrigen innerhalb von $(t, t + \tau_1)$ (für $T_r \leq \varepsilon$ läuft ja A_r nach rechts), wenn das Spiel nicht bis $t + \tau_1$ verlorengehen soll. Die Zeit, die nötig ist, um T_r von $\alpha - 5\varepsilon/4$ bis auf $5\varepsilon/4$ herabzusetzen, beträgt mindestens τ_2 , weil $4v/(v_w - v)$ die maximale Abnahmerate von T_r ist, die W in der Kontraktionsphase erreichen kann. Da nach Lemma 1 $T_l + T_r \geq \alpha$ bleibt, haben wir $\min\{T_l, T_r\} > \varepsilon$ während dieser Zeit.

Die Wiederholung des obigen Arguments liefert Lemma 3. Lemma 3 wiederum vervollständigt den Beweis.

6. Bemerkungen

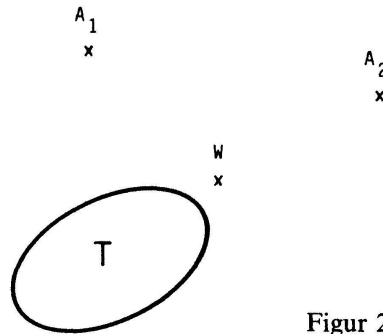
6.1 Die im Beweis von Lemma 1 getroffene Fallunterscheidung $v_w > 3v$ bzw. $v_w \leq 3v$ ist nicht zufällig. Im ersten Fall hängen die Gewinnaussichten für W von der Entfernung d der Angreifer vom Ursprung ab. Ist d gross, dann kann W gewinnen, unterschreitet d den Schwellwert $d^* = (a/v_w + a/v)v(v_w - v)/(v_w - 3v)$, so gewinnen A_l und A_r . Im zweiten Fall dagegen hat W bei richtigem Verhalten seiner Kontrahenten keine Gewinnchance.

6.2. Im Falle $e > 0$ kann man die qualitative Frage nach Sieg oder Niederlage durch die quantitative Frage ersetzen, wie A_l, A_r ihr Ziel möglichst schnell erreichen, wenn andererseits W das Spielende möglichst lange hinauszögern will. Zwei Andeutungen mögen zu diesem Thema genügen. Aus Lemma 3 folgt, dass die Spieldauer den Wert $\tau = \tau_B + \tau_1$ nicht überschreitet, wenn die Angreifer die angegebene Strategie verfolgen. Beachtenswert ist, dass im Falle $v_w > 3v$ die Garantieschranke τ gegen Unendlich geht, wenn d sich von unten d^* nähert und damit e gegen Null geht. Dem Leser sei es überlassen, sich zu überlegen, dass tatsächlich die von W erzwingbare Spieldauer gegen Unendlich geht, wenn der Vorsprung e der Angreifer gegen Null geht.

7. Ein offenes Problem

Man löse das zweidimensionale Analogon, wobei die Spieler sich in der Ebene bewegen und T ein abgeschlossenes, beschränktes und konvexes Gebiet ist.

Es erscheint plausibel, dass die lineare Lösung gültig ist, vorausgesetzt, die Spieler befinden sich anfänglich auf der Geraden durch einen Durchmesser von T . Dies deutet



Figur 2

an, dass das Problem beträchtlich komplizierter sein wird als die entsprechende Zwei-Spieler-Version ([1], Beispiel 1.9.2. Für eine strenge Lösung vergleiche man [2]). Darüber hinaus dürfte auch das sukzessive Einfangen der Angreifer im Falle, dass W gewinnt, dann nicht ganz einfach sein, wenn diese zu Beginn nahe beieinander sind. Dies wird nahegelegt durch das Spiel «Point capture of two evaders in succession» [3].

Klaus Thews, Unterhaching

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 R. Isaacs: Differential Games. Wiley, New York 1965.
- 2 A. Friedman: Differential Games. Wiley, New York 1971.
- 3 J. V. Breakwell und P. Hagedorn: Point capture of two evaders in succession. J. Optim. Theory Applic. 27/1 (1979).

© 1984 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/84/060149-06\$1.50 + 0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 902. Give a proof for the following generalisation of Aufgabe 890: Let h_i and m_i ($i = 0, \dots, n; n \geq 3$) be the heights and the medians of an n -dimensional simplex, respectively, and let V be its volume. Then

$$V^{-1} \left(\sum_{i=0}^n h_i \right) \left(\sum_{i=0}^n m_i^{n-1} \right) \geq n! (n+1)^{(n+3)/2} n^{-n/2}$$

with equality if and only if the simplex is regular.

M. S. Klamkin, Edmonton, Canada

Solution by the proposer: We use the following known results:

$$\sum_{i=0}^n m_i^{n-1} / (n+1) \geq \left(\sum_{i=0}^n m_i^2 / (n+1) \right)^{(n-1)/2}, \quad (1)$$

$$\sum_{i=0}^n m_i^2 = (n+1) n^{-2} \sum_{i < j} a_{ij}^2 \quad (2)$$