Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 39 (1984)

Heft: 6

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Kleine Mitteilungen

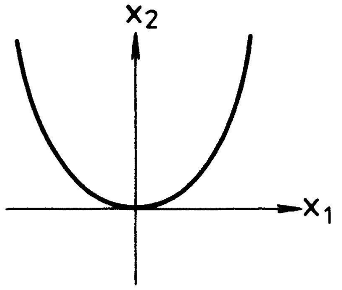
Geometrische Deutung von Krümmung und Torsion einer Raumkurve

In der Literatur findet sich wiederholt die Bemerkung, dass im Gegensatz zum Krümmungsradius ρ der Torsionsradius τ keine anschauliche geometrische Bedeutung habe. Im folgenden soll eine solche gegeben werden.

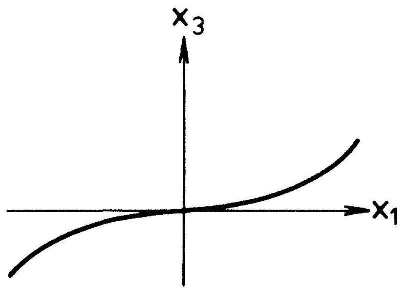
Mit der Bogenlänge s als Parameter lautet die sogenannte kanonische Darstellung einer Kurve in der Umgebung von $s = 0$ in bezug auf das begleitende Dreibein

$$x_1 = s - \frac{1}{6\rho_0^2} s^3 + \cdots; \qquad x_2 = \frac{1}{2\rho_0} s^2 - \frac{\rho_0'}{6\rho_0^2} s^3 + \cdots; \qquad x_3 = \frac{1}{6\rho_0 \tau_0} s^3 + \cdots,$$

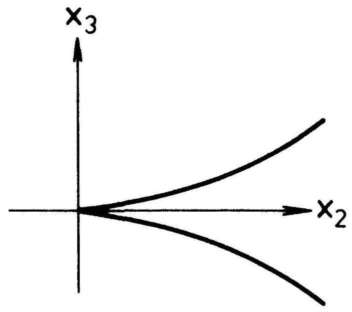
so dass also die Projektionen der Kurve in bezug auf die Ebenen des Dreikants so aussehen (Fig. 1, 2, 3):



Figur 1



Figur 2



Figur 3

In der $x_1 x_2$-Ebene, der Schmiegebene, ist bis auf Grössen höherer Ordnung

$$x_1 = s, \; x_2 = \frac{1}{2\rho_0} s^2,$$

also $x_1^2 = 2\rho_0 x_2$; der Normalriss der Kurve kann also füglich durch die Schmiegungsparabel $x_1^2 = 2\rho_0 x_2$ ersetzt werden, deren Normalsystem sich in der Umgebung von $s = 0$ bis auf Grössen höherer Ordnung mit dem der Hauptnormalen der Kurven deckt.

In der $x_2 x_3$-Ebene, der Normalebene, gilt für den Normalriss bis auf Grössen höherer Ordnung

$$x_2 = \frac{1}{2\rho_0} s^2, \quad x_3 = \frac{1}{6\rho_0 \tau_0} s^3,$$

also

$$(2\rho_0 x_2)^3 = (6\rho_0 \tau_0 x_3)^2, \quad x_2^3 = \frac{9\tau_0^2}{2\rho_0} x_3^2.$$

Diese semikubische Parabel ist Evolute der Parabel

$$x_3^2 = 2p(x_2 + p) \quad \text{bzw.} \quad x_2 = \frac{x_3^2 - 2p^2}{2p}$$

mit der Gleichung

$$x_2^3 = \frac{27}{8} p x_3^2,$$

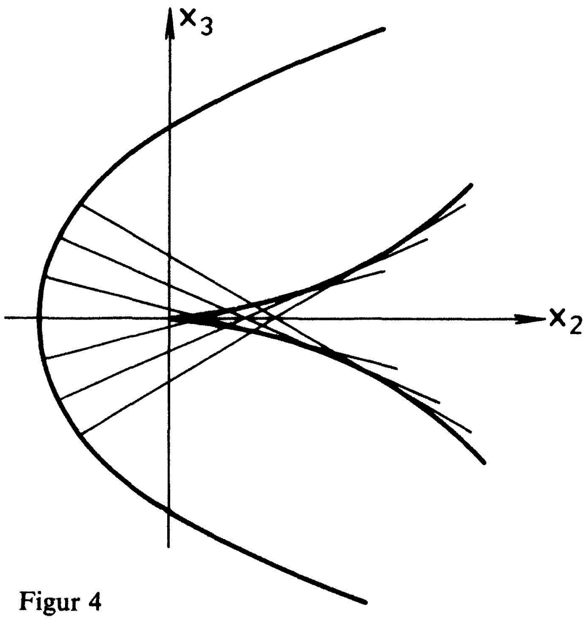
wenn

$$\frac{9\tau_0^2}{2\rho_0} = \frac{27}{8} p, \quad \text{d.h.} \quad p = \frac{4\tau_0^2}{3\rho_0}$$

gesetzt wird. Diese Parabel

$$x_3^2 = \frac{8\tau_0^2}{3\rho_0}\left(x_2 + \frac{4\tau_0^2}{3\rho_0}\right)$$

hat also ein Normalensystem, das sich in der Umgebung des Ursprungs mit den Normalrissen der Kurventangenten bis auf Grössen höherer Ordnung deckt (Fig. 4).



Figur 4

Wie die ersterwähnte *Krümmungsparabel* kann diese *Torsionsparabel* zur geometrischen Deutung der Torsion herangezogen werden, indem man statt τ den Parameter der Parabel $4\tau^2/3\rho$ als «Torsionsparameter» einführt. Krümmungs- und Torsionsparabeln erfüllen zwei Flächen, deren Studium sich lohnen dürfte.

Bekir Dizioğlu, TH Braunschweig

LITERATURVERZEICHNIS

W. Blaschke und H. Reichardt: Einführung in die Differentialgeometrie, 2. Aufl., S. 19. Berlin, 1960.

 0013-6018/84/060147-02$1.50 + 0.20/0