Aufgaben

Aufgabe 900. Es seien h_a, h_b, h_c die Höhen, r der Inkreisradius eines ebenen Dreiecks. Man schätze

$$\frac{h_a - r}{h_a + r} + \frac{h_b - r}{h_b + r} + \frac{h_c - r}{h_c + r}$$

bestmöglich nach unten ab.

M. D. Milosevic, Pranjani, YU

Lösung: O.B.d.A. betrachten wir Dreiecke vom Umfang $a + b + c = 1$. Für diese ist

$$\varphi(a,b,c) := \frac{h_a - r}{h_a + r} + \frac{h_b - r}{h_b + r} + \frac{h_c - r}{h_c + r} = \frac{1-a}{1+a} + \frac{1-b}{1+b} + \frac{1-c}{1+c}.$$

Es sei $\mathbf{D}$ die durch $a + b + c = 1$ sowie die Dreiecksungleichungen $0 \leqslant a \leqslant b + c$ usw. definierte Teilmenge des $\mathbf{R}^3$. Wegen der Konvexität der Funktion $f(x) = (1 - x)/(1 + x)$ in $0 \leqslant x \leqslant 1$ ist φ konvex in $\mathbf{D}$, d.h. $\varphi(a,b,c) \geqslant \varphi(1/3, 1/3, 1/3) = 3/2$. Da ferner φ für $(a,b,c) = (0, 1/2, 1/2)$ maximal wird, gilt aus Stetigkeitsgründen für eigentliche Dreiecke $\varphi(a,b,c) \leqslant (0, 1/2, 1/2) = 5/3$. Die bestmöglichen Abschätzungen von φ lauten also

$$3/2 \leqslant \varphi(a,b,c) < 5/3$$

mit Gleichheit genau für reguläre Dreiecke.

O. P. Lossers, Eindhoven, NL

Weitere Lösungen sandten S. Arslanagic (Trebinje, YU), G. Bercea (München, BRD), C. Bindschedler (Küsnacht), E. Braune (Linz, A), P. Bundschuh (Köln, BRD), L. Cseh (Odorheiu-Secuiesc, Rumänien), H. Egli (Zürich), H. Frischknecht (Berneck), W. Janous (Innsbruck, A), M. S. Klamkin (Edmonton, Kanada), L. Kuipers (Sierre), V. D. Mascioni (Origlio; 2 Lösungen), I. Merényi (Cluj-Napoca, Rumänien), Hj. Stocker (Wädenswil).

Aufgabe 901. Die Funktion $f: \{z \in \mathbf{C}; |z| = 1\} \to \{z \in \mathbf{C}; |z| \leq 1\}$ sei holomorph und es sei $f(0) = 0$. Dann trifft genau eine der beiden folgenden Aussagen zu:

$$\left| \int_{-1}^{1} f(x)\, dx \right| < 2/3. \tag{1}$$

Es gibt eine Konstante $\alpha \in \mathbf{C}$ mit $|\alpha| = 1$ derart, dass

$$f(z) = \alpha z^2. \tag{2}$$

Dies ist zu zeigen.

P. von Siebenthal, Zürich

Lösung: Es sei $\mathbf{D}$ die offene Einheitskreisscheibe, also $\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$. Zunächst zerlegen wir die Funktion f in den geraden Anteil w und den ungeraden Anteil v, also

$$f(z) = w(z) + v(z), \tag{3}$$

mit

$$w(z) = \frac{1}{2}\big(f(z) + f(-z)\big) \quad \text{und} \quad v(z) = \frac{1}{2}\big(f(z) - f(-z)\big).$$

Aus den Voraussetzungen über f folgt, dass w die Form

$$w(z) = z^2 g(z)$$

hat, wobei die Funktion g holomorph in $\mathbf{D}$ und $|g(z)| \leqslant 1$ für jedes $z \in \mathbf{D}$ ist.

1. Fall. $|g(z)| < 1$ für jedes $z \in \mathbf{D}$.
Da die Funktion v ungerade ist, ist das Integral $\int_{-1}^{+1} v(x)\,dx = 0$. Daher ergibt sich sofort die gewünschte Ungleichung:

$$\left|\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{-1}^{+1} w(x)\,dx\right| \leqslant \int_{-1}^{+1} |x^2 g(x)|\,dx < \int_{-1}^{+1} x^2\,dx = \frac{2}{3}.$$

2. Fall. $|g(z_0)| = 1$ für ein $z_0 \in \mathbf{D}$.
Nach dem Maximumprinzip ist demnach $|g(z)| = 1$ für jedes $z \in \mathbf{D}$, also $g(z) \equiv \text{const} = \alpha$ mit $|\alpha| = 1$.
Die Funktion f lässt sich daher nach (3) in der Form

$$f(z) = \alpha z^2 + v(z)$$

darstellen.
Beachtet man, dass v ungerade ist, so gilt für jedes $z \in \mathbf{D}$.

$$|\alpha z^2 + v(z)| = |f(z)| \leqslant 1$$
$$|\alpha z^2 - v(z)| = |f(-z)| \leqslant 1.$$

Quadrieren und Addition ergibt wegen $|\alpha| = 1$:

$$|z|^4 + |v(z)|^2 \leqslant 1 \qquad (z \in \mathbf{D}). \tag{4}$$

Die Ungleichung (4) impliziert jedoch, dass $v(z)$ gleichmässig gegen Null geht, falls z gegen den Rand von $\mathbf{D}$ strebt. Nach dem Maximumprinzip ist also v identisch Null. Somit hat f die Gestalt

$$f(z) = \alpha z^2,$$

mit $|\alpha| = 1$.

R. Mortini, Karlsruhe, BRD

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), L. Cseh (Odorheiu-Secuiesc, Rumänien), W. Hensgen (München), Kee-wai Lau (Hongkong), I. Merényi (Cluj-Napoca, Rumänien), Chr. A. Meyer (Berlin). Eine Beweisskizze sandte Hj. Stocker (Wädenswil).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. April 1985* and *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44), Problem 862A (Band 36, S. 68), Problem 887A (Band 37, S. 151).

Aufgabe 912. In einem rechtwinkligen Dreieck ABC wird das Lot von einem Punkt D der Kathete $\overline{AC}$ auf die Hypothenuse $\overline{AB}$ gefällt. Der Fusspunkt sei E. Die Transversalen $\overline{BD}$ und $\overline{CE}$ schneiden sich in S. Durchläuft D die Seite $\overline{AC}$, so beschreibt S eine durch A und C verlaufende Kurve k. T sei der Schnittpunkt von k mit dem Kreis um B durch C. Man zeige, dass BT den Winkel ABC drittelt.

M. Diederichs, Leichlingen, BRD

Aufgabe 913. Compute the ratio

$$r = \frac{\sqrt[3]{2742} + \sqrt[3]{32540} - \sqrt[3]{96843}}{\sqrt[3]{4881} + \sqrt[3]{20388} - \sqrt[3]{86830}}$$

to a precision of 10 significant figures.

J. Waldvogel, Zürich