Eine Ramsey-Zahl für fünf Knoten und acht Kanten

Autor(en): **Harborth, Heiko / Mengersen, Ingrid**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **39 (1984)**

Heft 1

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-38011

5 H. Groemer: Eulersche Charakteristik, Projektionen und Quermassintegrale. Math. Ann. *198*, 23-56 (1972).
6 H. Groemer: Über einige Invarianzeigenschaften der Eulerschen Charakteristik. Comment. Math. Helv. *48*, 87-99 (1973).
7 H. Groemer: On the Euler characteristic in spaces with a separability property. Math. Ann. *211*, 315-321 (1974).
8 H. Groemer: The Euler characteristic and related functionals on convex surfaces. Geometriae dedicata *4*, 91-104 (1975).
9 H. Groemer: On the extension of additive functionals on classes of convex sets. Pacific J. Math. *75*, 397-410 (1978).
10 B. Grünbaum: Convex Polytopes. Wiley, New York 1967.
11 H. Hadwiger: Eulers Charakteristik und kombinatorische Geometrie. J. reine angew. Math. *194*, 101-110 (1955).
12 H. Hadwiger: Eine Schnittrekursion für die Eulersche Charakteristik euklidischer Polyeder mit Anwendungen innerhalb der kombinatorischen Geometrie. El. Math. *23*, 121-132 (1968).
13 H. Hadwiger: Notiz zur Eulerschen Charakteristik offener und abgeschlossener euklidischer Polyeder. Studia Sci. Math. hung. *4*, 385-387 (1969).
14 H. Hadwiger: Erweiterter Polyedersatz und Euler-Shepardsche Additionstheoreme. Abh. Math. Seminar Univ. Hamburg *39*, 120-129 (1973).
15 H. Hadwiger und P. Mani: On the Euler characteristic of spherical polyhedra and the Euler relation. Mathematika *19*, 139-143 (1972).
16 H. Hadwiger und P. Mani: On polyhedra with extremal Euler characteristic. J. Comb. Theory (ser. A) *17*, 345-349 (1974).
17 V. Klee: The Euler characteristic in combinatorial Geometry. Am. Math. Monthly *70*, 119-127 (1963).
18 H. Lenz: Mengenalgebra und Eulersche Charakteristik. Abh. Math. Seminar Univ. Hamburg *34*, 135-147 (1970).
19 W. Nef: Beiträge zur Theorie der Polyeder, mit Anwendungen in der Computergraphik. Herbert Lang, Bern 1978.
20 W. Nef: Zur Eulerschen Charakteristik allgemeiner, insbesondere konvexer Polyeder. Result. Math. *3*, 64-69 (1980).
21 W. Nef: Zur Einführung der Eulerschen Charakteristik. Monatsh. Math. *92*, 41-46 (1981).
22 L. Schläfli: Theorie der vielfachen Kontinuität. Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd. 1, S. 189-191, Birkhäuser, Basel 1950.

 0013-6018/84/010001-06$1.50+0.20/0

Eine Ramsey-Zahl für fünf Knoten und acht Kanten

Als klassische Ramsey-Zahl $r(p)$ bezeichnet man die kleinste natürliche Zahl n, für die bei jeder 2-Färbung der Kanten des vollständigen Graphen mit n Knoten, K_n, ein einfarbiger Teilgraph K_p vorkommt. Es sind $r(3)=6$ und $r(4)=18$ wohlbekannt. Jedoch schon für $p=5$ weiß man bisher nur $42 \leqq r(5) \leqq 55$.

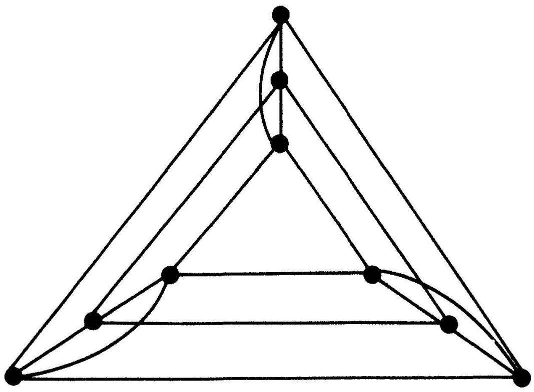
In der Literatur sind verschiedene Variationen der Ramsey-Zahlen zu finden [2, 4]. Hier sollen eine andere Abwandlung und erste Ergebnisse für $p=5$ vorgestellt werden. Ähnliche Verallgemeinerungen wurden schon in [1, 3] behandelt.

Für $q \leqq \binom{p}{2}$ sei $r = r_q(p)$ die kleinste Anzahl von Knoten eines K_n, so daß bei jeder 2-Färbung aller Kanten des K_n ein Teilgraph mit p Knoten und q Kanten einer Farbe, kurz ein einfarbiger (p,q)-Graph, vorkommt. Natürlich ist $r_q(p) = p$ für $q \leqq \left\{\binom{p}{2}/2\right\}$. Die Werte $r_q(p)$ für $q < \binom{p}{2}$ lassen sich als eine Art Annäherung an die klassische, für $p \geqq 5$ noch unbekannte Ramsey-Zahl $r(p) = r_{\binom{p}{2}}(p)$ auffassen.

Satz: *Es gelten*

$$r_6(5) = 6, \quad r_7(5) = 10 \quad \textit{und} \quad r_8(5) = 14.$$

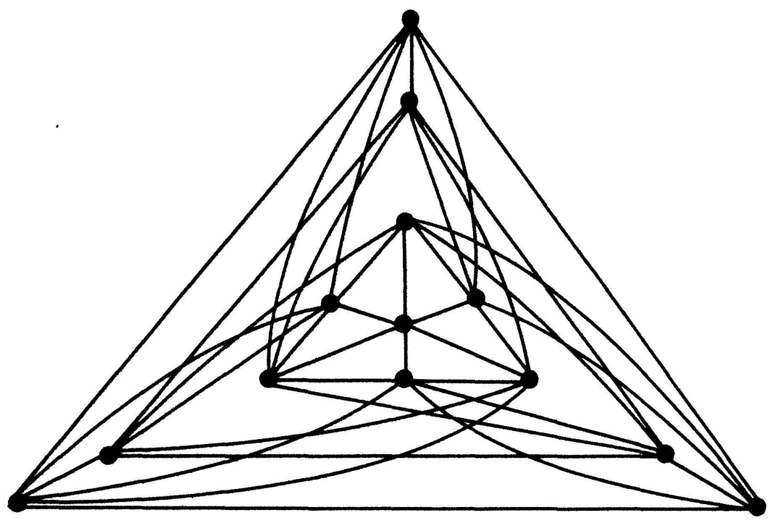
Beweis: $q = 6$: Werden 5 Kanten des K_5 grün und die übrigen 5 rot gefärbt, so kommt kein einfarbiger $(5,6)$-Graph vor, das heisst $r_6(5) > 5$.
Im K_6 sind stets $x \geqq 8$ Kanten von einer Farbe, etwa grün. Entfernt man einen Knoten, der mit der kleinsten Anzahl y grüner Kanten inzidiert, so enthält der Restgraph und damit auch der K_6 einen grünen $(5,6)$-Graph. Dies gilt für $y \leqq 2$ trivialerweise und wegen $x \geqq 3y$ auch für $y \geqq 3$. Damit ist $r_6(5) \leqq 6$ gezeigt.



Figur 1. 2-Färbung der Kanten des K_9 (nur die Kanten einer Farbe sind gezeichnet) ohne Teilgraph mit 5 Knoten und 7 Kanten einer Farbe.

$q = 7$: In Figur 1 sind je 5 der 9 Punkte durch 4, 5 oder 6 Kanten verbunden, und das bedeutet $r_7(5) > 9$.
Jeder Knoten im K_{10} inzidiert mit mindestens 5 Kanten einer Farbe, einer etwa mit 5 grünen. Sind höchstens 3 der Kanten zwischen den 5 Endknoten grün, so kommt ein roter $(5,7)$-Graph vor. Andernfalls gibt es unter den 5 Endknoten 4 mit 3 grünen Verbindungskanten und damit einen grünen $(5,7)$-Graph. Hieraus folgt $r_7(5) \leqq 10$.

$q = 8$: Je 5 der 13 Punkte in Figur 2 sind durch 3, 4, 5, 6 oder 7 Kanten verbunden, so dass $r_8(5) > 13$ gilt. Um $r_8(5) \leqq 14$ nachzuweisen, zeigen wir zunächst



Figur 2. Alle Kanten einer Farbe in einer 2-Färbung der Kanten des K_{13} ohne Teilgraph mit 5 Knoten und 8 Kanten einer Farbe.

Hilfssatz (HS): Für $n \geqq 13$ enthält jede 2-Färbung des K_n mit einfarbigem K_4 auch einen einfarbigen (5,8)-Graph.

Beweis: Es genügt, $n = 13$ zu betrachten. Zu einem etwa grünen K_4 gehen von den übrigen 9 Knoten jeweils mindestens 3, also zusammen mindestens 27 rote Kanten, oder es gibt einen grünen (5,8)-Graph. Zu zwei Knoten des grünen K_4 gehen mindestens 14 der 27 roten Kanten, so dass von jedem der beiden Knoten nur rote Kanten zu 5 der 9 Knoten gehen. Diese 5 Knoten bilden einen grünen (5,8)-Graph oder von einem Knoten gehen 2 rote Kanten zu 2 anderen der 5 Knoten, so dass diese 3 Knoten zusammen mit den 2 Knoten des grünen K_4 einen roten (5,8)-Graph bilden.

Nun inzidieren im K_{14} mit jedem Knoten mindestens 7 Kanten einer Farbe. Vom Knoten a gehen etwa x grüne Kanten zu den Knoten 1 bis x mit $x \geqq 7$. Folgende drei Fälle sind möglich: Entweder ist einer dieser x Knoten, etwa 1, mit mindestens drei der x Knoten, etwa 2, 3 und 4, grün verbunden oder mit mindestens fünf, etwa 3, 4, 5, 6 und 7, rot, oder aber von jedem der x Knoten gehen zu den anderen zwei grüne und vier rote Kanten, woraus $x = 7$ folgt.

Im ersten Fall kommt entweder ein grüner K_4 vor (s. HS) oder 2, 3 und 4 sind rot verbunden und ebenso zwei der Knoten 5, 6 und 7, etwa 5 und 6. Gehen von 5 und 6 mindestens vier rote Kanten zu den Knoten 2, 3 und 4, so bilden 2, 3, 4, 5, 6 einen roten (5,8)-Graph. Andernfalls gehen etwa von 5 grüne Kanten zu zwei der Knoten 2, 3 und 4, und diese bilden mit 5, a und 1 einen grünen (5,8)-Graph.

Im zweiten Fall gibt es entweder ein einfarbiges Dreieck mit Knoten aus $\{3, 4, 5, 6, 7\}$, also mit a oder 1 einen einfarbigen K_4 (s. HS), oder die Kanten zwischen den Knoten 3 bis 7 bilden einen grünen und einen roten C_5 (Kreis der Länge 5). Gehen dann drei rote Kanten vom Knoten 2 zu drei auf dem roten C_5 aufeinanderfolgenden Knoten, so bilden diese mit 1 und 2 einen

roten (5,8)-Graph. Sonst gibt es drei unter den Knoten 3 bis 7, die mit a und 2 einen grünen (5,8)-Graph erzeugen.
Bilden im dritten Fall die grünen Kanten zwischen den $x=7$ Knoten ein Dreieck, so gibt es einen grünen K_4 (s. HS). Also können die grünen Kanten nur noch einen C_7 bilden, ohne Einschränkung der Allgemeinheit mit den Knoten 1 bis 7 in zyklischer Reihenfolge.
Es bleibt zu betrachten, dass jeder Knoten des K_{14} mit genau sieben Kanten einer Farbe inzidiert, die Endknoten dieser Kanten einen C_7 von gleicher Farbe aufspannen und alle übrigen Kanten zwischen den Endknoten von der anderen Farbe sind.
Gehen von einem der Knoten 1 bis 7, etwa von 1, sieben rote Kanten aus, so muss zum roten C_7 die Kantenfolge (4, 6, 3, 5) gehören, die etwa durch (8, 9, 10) in rot aus den mit a rot verbundenen Knoten 8 bis 13 ergänzt werden kann. Dann bilden aber a, 1, 8, 9, 10 einen roten (5,8)-Graph.
Sonst inzidieren mit den Knoten 1 bis 7 jeweils sieben grüne Kanten, das heisst, vier davon, also insgesamt $7 \cdot 4 = 28$, auch mit den Knoten 8 bis 13. Von einem dieser sechs Knoten gehen daher fünf grüne Kanten zu dem zu a gehörenden grünen C_7. In jedem Fall werden drei aufeinanderfolgende Knoten dieses grünen C_7 erfasst, die zusammen mit 8 und a einen grünen (5,8)-Graph garantieren.
Damit ist auch $r_8(5) \leqq 14$ bewiesen.
Für $q=9$ konnte auf ähnliche Weise bisher nur $20 \leqq r_9(5) \leqq 24$ erreicht werden.

Heiko Harborth und Ingrid Mengersen, Braunschweig

LITERATURVERZEICHNIS

1 R. Bolze und H. Harborth: The Ramsey Number $r(K_4-x, K_5)$. In: The Theory and Applications of Graphs (editors: G. Chartrand, Y. Alavi, D. L. Goldsmith, L. Lesniak-Forster und D. R. Lick). John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore 1981, 109–116.
2 R. L. Graham, B. L. Rothschild und J. H. Spencer: Ramsey Theory. John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto 1980.
3 U. Grenda und H. Harborth: The Ramsey Number $r(K_3, K_7-e)$. J. Combinatorics Information Syst. Sci. 7, 166–169 (1982).
4 F. Harary: Generalized Ramsey Theory I to XIII: Achievement and Avoidance Numbers. In: The Theory and Applications of Graphs (editors: G. Chartrand, Y. Alavi, D. L. Goldsmith, L. Lesniak-Forster and D. R. Lick). John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore 1981, 373–390.

 0013-6018/84/010006-04$1.50+0.20/0