Pflasterungen des Raumes mit Pyramiden und Doppelpyramiden

Autor(en): **Schulte, Egon**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **39 (1984)**

Heft 5

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-38022

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK
Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare
Zeitschrift zur Pflege der Mathematik und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
El. Math. Band 39 Nr. 5 Seiten 113–136 Basel, 10. September 1984

Pflasterungen des Raumes mit Pyramiden und Doppelpyramiden

1. Einleitung

Eine *Pflasterung* $\mathscr{P}$ des 3dimensionalen euklidischen Raumes $\mathbf{E}^3$ ist eine Familie konvexer Polytope, die den Raum lückenlos und ohne Überlappungen überdecken. Die Mitglieder von $\mathscr{P}$ heissen *Pflastersteine* von $\mathscr{P}$. In diesem Beitrag betrachten wir ausschliesslich Pflasterungen, deren Pflastersteine Polytope eines speziellen kombinatorischen Typs sind, und zwar entweder Pyramiden oder Doppelpyramiden. Wir nennen eine Pyramide oder Doppelpyramide *n-eckig,* wenn ihre Basis ein (ebenes) n-Eck ist.
Eine Pflasterung $\mathscr{P}$ heisse *seitentreu* (oder *face-to-face*), wenn der Durchschnitt je zweier Pflastersteine von $\mathscr{P}$ entweder leer oder aber eine Seite, d.h. Ecke, Kante oder Facette, beider ist. Gegebenenfalls besitzt dann jede Teilfamilie von $\mathscr{P}$ die Eigenschaft, dass der Durchschnitt ihrer Mitglieder entweder leer oder eine Seite jedes Mitglieds ist.
Wir nennen eine Pflasterung $\mathscr{P}$ *normal,* wenn ihre Pflastersteine gleichmässig beschränkt sind, d.h. wenn zwei positive reelle Zahlen r und R existieren, so dass jeder Pflasterstein einerseits eine Kugel vom Radius r enthält und andererseits in einer Kugel von Radius R enthalten ist.
Eine natürliche Forderung an Pflasterungen ist die der lokalen Endlichkeit. Eine Pflasterung $\mathscr{P}$ heisse *lokal endlich,* wenn jeder Punkt des Raumes eine Umgebung besitzt, die nur endlich viele Pflastersteine von $\mathscr{P}$ trifft.
Dieser Beitrag beantwortet eine mehrfach beschriebene Fragestellung zu Pflasterungen des Raumes mit Pyramiden und Doppelpyramiden (siehe z.B. Grünbaum-Shephard [5], Shephard [10]). Wir werden zeigen, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 3$ lokal endliche, seitentreue Pflasterungen des Raumes mit lauter n-eckigen konvexen Pyramiden existieren. Insbesondere werden wir solche Pflasterungen konstruieren, die gleichzeitig lokal endliche, seitentreue Pflasterungen mit n-eckigen konvexen Doppelpyramiden induzieren, für die sich also je zwei Pyramiden mit einer gemeinsamen Basis zu einer konvexen Doppelpyramide zusammenfügen lassen.
Da der Fall $n \leq 4$ trivial ist, beschränken wir unsere Betrachtungen auf den Fall $n \geq 5$. Es sei erwähnt, dass der Fall der 5eckigen Pyramide bereits jeweils voneinander unabhängig von Danzer, Ewald, Zaks und Zamfirescu gelöst wurde. Ihre Konstruktionen benutzen die Zerlegbarkeit des Quadrats in Fünfecke und die daraus resultierende Zerlegbarkeit des 3dimensionalen Würfels in 5eckige Pyramiden (siehe Danzer, Grünbaum, Shephard [2]). Danzer fand ausserdem Pflasterungen des Raumes mit 5- bzw. 6eckigen Doppelpyramiden (private Mitteilung).

Unsere Konstruktionsmethoden werden jeweils nicht-normale Pflasterungen liefern. In der Tat sind offenbar für kein $n \geq 6$ normale Pflasterungen mit n-eckigen konvexen Pyramiden bekannt. Jedoch scheint sich das Problem zu ändern, falls nicht-konvexe Pyramiden zugelassen werden. Wir geben dazu ein Beispiel einer Pflasterung mit 6eckigen Pyramiden an, die nur drei (isometrische) Prototypen besitzt, von denen einer nicht-konvex ist.

Bevor wir mit der Beschreibung der Konstruktion beginnen, sei noch darauf hingewiesen, dass sich unsere Betrachtungen dem weit allgemeineren Problem der Charakterisierung solcher konvexer Polytope unterordnen, die als kombinatorische Prototypen lokal endlicher, seitentreuer Pflasterungen mit lauter kombinatorisch äquivalenten konvexen Polytopen auftreten können. In dieser Allgemeinheit wurde das Problem erstmals von Danzer 1975 beim LMS-Symposium «Relations between infinite-dimensional and finitely dimensional convexity» in Durham gestellt. Hinsichtlich einer Übersicht über diesen allgemeinen Problemkreis und der Darstellung von Teilresultaten werde auf die Arbeiten Danzer, Grünbaum, Shephard [2], Grünbaum, Mani, Shephard [4] und [8, 9] verwiesen. Für Pyramiden wurde das Problem zuerst vom Autor und später unabhängig davon von Grünbaum, Mani und Shephard in [4] gelöst.

Die hier verwendete Notation zu konvexen Polytopen und Pflasterungen orientiert sich an Grünbaum [3] bzw. Grünbaum, Shephard [6].

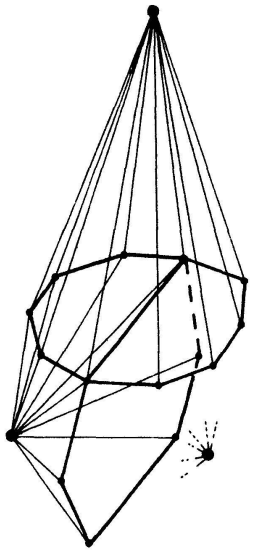
2. Konstruktion

Wir verwenden folgende Bezeichnungen. Für je drei Punkte x, y und z des Raumes $\mathbf{E}^3$ bezeichne $aff(x, y, z)$ die affine Hülle von x, y und z. Falls $x \neq y$ ist, so sei $[x, y]$ die Strecke mit Endpunkten x und y und $\overrightarrow{xy}$ der von x ausgehende, y treffende Halbstrahl. Im folgenden sei $n \geq 5$ fest. Zunächst werden wir eine unendliche Folge $(\mathscr{P}_i)_{i \in \mathbf{N}}$ von endlichen, geometrischen Zellkomplexen mit n-eckigen konvexen Pyramiden als Zellen konstruieren, die die nachstehenden Eigenschaften besitzt.

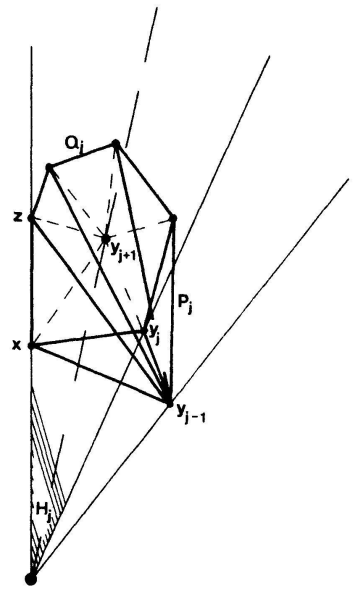
Die Folge ist monoton wachsend, d.h. $\mathscr{P}_i \subset \mathscr{P}_{i+1}$ für jedes i, und die Vereinigung aller $\mathscr{P}_i$ ist eine lokal endliche Pflasterung des Raumes. Der Träger jedes Komplexes $\mathscr{P}_i$ ist topologisch eine Kugel, die sternförmig bezüglich des Ursprungs 0 ist (d.h. jeder von 0 ausgehende Halbstrahl trifft ihren Rand in genau einem Punkt). Ausserdem werden wir verlangen, dass der Randkomplex $\mathscr{B}_i$ jedes Zellkomplexes $\mathscr{P}_i$ simplizial ist und ausschliesslich Ecken gerader Valenz (bezüglich $\mathscr{B}_i$) besitzt. Damit ist sichergestellt, dass $\mathscr{B}_i$ niemals die Basis einer Pyramide aus $\mathscr{P}_i$ enthält. Später werden wir diese Konstruktion modifizieren, um Pflasterungen mit konvexen Doppelpyramiden zu erhalten.

Figur 1 illustriert eine mögliche Wahl für den Komplex $\mathscr{P}_1$; der Fall $n = 6$ ist dargestellt. Die Basen der sechs Pyramiden haben eine Kante gemeinsam, die den Ursprung 0 als relativ inneren Punkt enthält. Die Pyramiden können sogar so angeordnet werden, dass sich je zwei Pyramiden mit einer gemeinsamen Basis zu einer konvexen Doppelpyramide zusammenfassen lassen. Nach Konstruktion hat jede Ecke von $\mathscr{B}_1$ eine gerade Valenz.

Die weitere Konstruktion erfolgt nun induktiv, d.h. wir konstruieren $\mathscr{P}_{i+1}$ aus $\mathscr{P}_i$ $(i \geq 1)$. Der Hauptgedanke wird in Figur 2 dargestellt.



Figur 1. $\mathscr{P}_1$ besteht aus sechs n-eckigen Pyramiden, deren Basen eine Kante gemeinsam haben. Lediglich vier der Pyramiden sind eingezeichnet.



Figur 2. Die Pyramiden P_j umgeben die Strecke $[x, z]$. Jedes P_j liegt in dem von $\overrightarrow{0x}$, $\overrightarrow{0\,y_{j-1}}$ und $\overrightarrow{0\,y_j}$ aufgespannten konvexen Kegel.

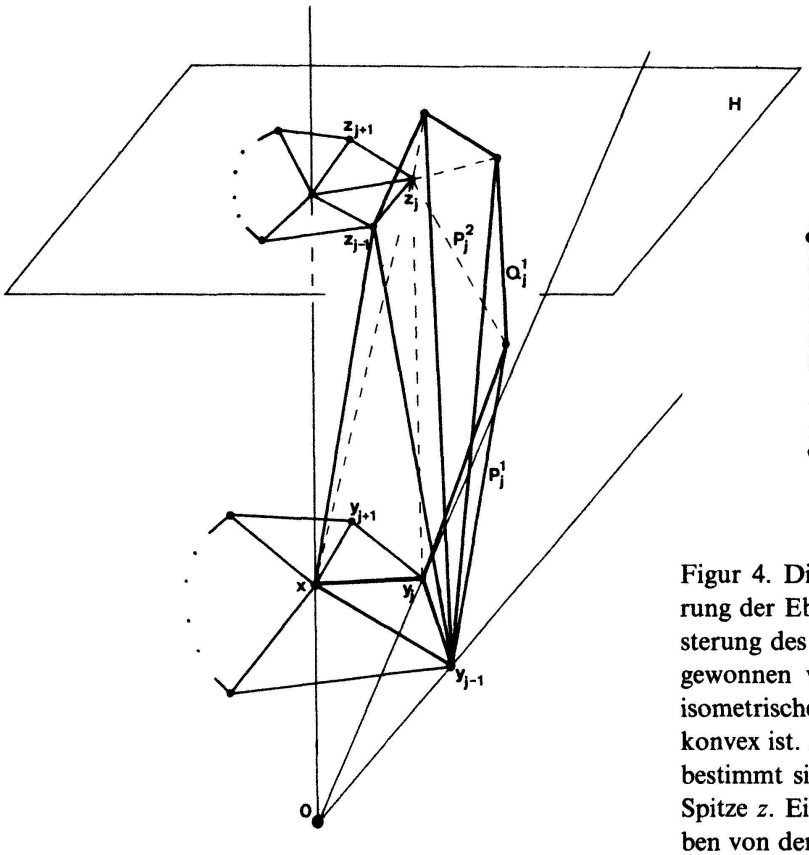
Sei x eine Ecke von $\mathscr{B}_i$, $y_1, \ldots, y_{2k}$ die benachbarten Ecken in $\mathscr{B}_i$ (in zyklischer Anordnung) und z ein fester Punkt in $\overrightarrow{0x}$, aber nicht in $[0, x]$. Für jedes ungerade j wählen wir in $aff(0, x, y_j)$ ein geeignetes konvexes n-Eck Q_j (mit $[z, x]$ und $[x, y_j]$ als zwei Kanten) und konstruieren die Pyramiden P_j und P_{j+1} mit der Basis Q_j und den Spitzen y_{j-1} bzw. y_{j+1}. Fügen wir nun alle diese Pyramiden zu $\mathscr{P}_i$ hinzu, so erhalten wir einen Zellkomplex $\mathscr{P}_{i,x}$, der x überdeckt und sternförmig bezüglich 0 ist. Da die Ecken seines Randkomplexes entweder Ecken von $\mathscr{B}_i$ oder Ecken eines n-Ecks Q_j sind, haben sie jeweils eine gerade Valenz.

In dieser Weise können wir sukzessiv mit allen Ecken von $\mathscr{B}_i$ verfahren und ständig neue Pyramiden zu den bereits konstruierten Komplexen hinzufügen. Nach endlich vielen Schritten sind dann alle Ecken von $\mathscr{B}_i$ überdeckt. Mit $\mathscr{P}_{i+1}$ bezeichnen wir denjenigen Zellkomplex, der die letzte Ecke von $\mathscr{B}_i$ überdeckt. Er besitzt die gewünschten Eigenschaften.

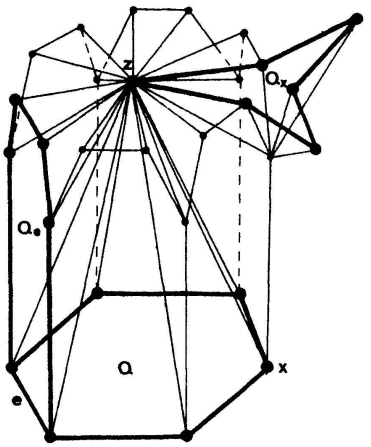
Da wir in der Wahl der n-Ecke Q_j genügend viel Freiraum haben, können wir sogar erreichen, dass alle Elemente von $\mathscr{B}_{i+1}$ einen hinreichend grossen Abstand von 0 haben. Dieses garantiert, dass unsere Konstruktionsmethode tatsächlich Pflasterungen des gesamten Raumes liefert.

Im allgemeinen werden diese Pflasterungen lediglich Pflasterungen des Raumes mit nicht-konvexen Doppelpyramiden induzieren. Die Konvexität der Doppelpyramiden kann aber durch die folgende Modifikation des Konstruktionsverfahrens erzielt werden. Wir werden erneut Zellkomplexe $\mathscr{P}_i$ mit Pyramiden als Zellen konstruieren, aber darauf achten, dass die Doppelpyramiden konvex werden. Offenbar können wir wieder den gleichen Zellkomplex $\mathscr{P}_1$ verwenden (siehe Fig. 1).

Zur Konstruktion von $\mathscr{P}_{i+1}$ aus $\mathscr{P}_i$ betrachten wir erneut eine Ecke x in $\mathscr{B}_i$ und ihre Nachbarn $y_1, \ldots, y_{2k}$ (siehe Fig. 3). In einer Ebene H, die orthogonal zu $\overrightarrow{0x}$ ist und einen genügenden Abstand von 0 hat, wählen wir ein hinreichend «kleines» konvexes $2k$-Eck



Figur 3. Das in der von x, y_j und z_{j-1} bestimmten Ebene liegende n-Eck Q_j^1 ist die Basis der beiden Pyramiden P_j^1 und P_j^2 mit Spitzen y_{j-1} bzw. z_j. Die Basis Q_j^2 (nicht eingezeichnet) der Pyramiden P_{j+1}^1 und P_{j+1}^2 mit Spitzen z_j bzw. y_{j+1} liegt in der durch x, y_j und z_{j+1} festgelegten Ebene.



Figur 4. Die Figur deutet an, wie aus der Pflasterung der Ebene mit regulären Sechsecken eine Pflasterung des Raumes mit lauter 6eckigen Pyramiden gewonnen werden kann. Sie besitzt lediglich drei isometrische Prototypen, von denen einer nichtkonvex ist. Jedes Sechseck Q der Ebenenpflasterung bestimmt sieben Pyramiden mit einer gemeinsamen Spitze z. Eine davon hat Q als Basis und ist umgeben von den übrigen sechs kongruenten Pyramiden, deren Basen Q_e eine Kante e mit Q gemeinsam haben und in zu Q orthogonalen Ebenen liegen. Ausserdem legt jede Ecke x der Ebenenpflasterung eine nichtkonvexe 6eckige Pyramide mit Basis Q_x fest. Durch geeignetes Aufschichten solcher Lagen von Pyramiden entsteht eine Pflasterung des Raumes.

mit Ecken $z_1, \ldots, z_{2k}$, so dass für jedes $j = 1, \ldots, 2k$ die Ecke z_j in $aff(0, x, y_j)$ liegt. Sodann konstruieren wir auf folgende Weise für jedes ungerade j vier Pyramiden. Wir wählen zwei ebene n-Ecke Q_j^1 (mit y_j, x, z_{j-1} als Ecken) und Q_j^2 (mit y_j, x, z_{j+1} als Ecken). Bei geeigneter Wahl formen dann sowohl die Pyramiden P_j^1 und P_j^2 mit der Basis Q_j^1 und den Spitzen y_{j-1} bzw. z_j als auch die Pyramiden P_{j+1}^1 und P_{j+1}^2 mit der Basis Q_j^2 und den Spitzen z_j bzw. y_{j+1} konvexe Doppelpyramiden. Fügen wir nun für jedes ungerade j diese vier Pyramiden zu $\mathscr{P}_i$ hinzu, so erhalten wir einen Zellkomplex $\mathscr{P}'_{i,x}$, der x allerdings noch nicht überdeckt. Jedoch garantiert die besondere Wahl der Punkte z_j, dass der Stern von x im Randkomplex von $\mathscr{P}'_{i,x}$ eine angenehme Gestalt hat. In der Tat, bei Anwendung des der Figur 2 zugrundeliegenden Konstruktionsverfahrens auf x und $\mathscr{P}'_{i,x}$ erhalten wir schliesslich einen Zellkomplex $\mathscr{P}_{i,x}$, der x überdeckt und eine Pflasterung von konvexen Doppelpyramiden induziert.

Verfahren wir nun wieder sukzessiv mit allen Ecken von $\mathscr{B}_i$ in dieser Weise und fügen ständig neue Pyramiden zu den bereits konstruierten Komplexen hinzu, so bekommen wir schliesslich einen Zellkomplex $\mathscr{P}_{i+1}$, der alle Ecken von $\mathscr{B}_i$ überdeckt. Auch bei diesem Konstruktionsverfahren besteht genügend Freiraum für die Wahl neu hinzugenommener Ecken, so dass bei geeigneter Wahl eine Pflasterung des Raumes entsteht. Wir fassen unsere Resultate im folgenden Satz zusammen.

Satz. *Für jede natürliche Zahl $n \geq 3$ existieren sowohl lokal endliche, seitentreue Pflasterungen des 3dimensionalen euklidischen Raumes mit n-eckigen konvexen Pyramiden als auch solche mit n-eckigen konvexen Doppelpyramiden.*

Eine sorgfältige Durchsicht des Konstruktionsverfahrens zeigt, dass unsere Pflasterungen stets nicht-normal sind. Wie bereits anfangs erwähnt wurde, existieren normale, seitentreue Pflasterungen für $n \leq 5$. Für $n \geq 6$ jedoch ist das folgende Problem noch offen.

Gibt es normale, seitentreue Pflasterungen des euklidischen Raumes mit n-eckigen konvexen Pyramiden (Doppelpyramiden)?

Das Problem ändert sich schnell, wenn wir nicht-konvexe Pflastersteine zulassen. Figur 4 illustriert die Konstruktion einer seitentreuen Pflasterung mit 6eckigen Pyramiden aus der Zerlegung der Ebene in reguläre Sechsecke (vgl. Coxeter [1]). Sie besitzt nur drei isometrische Prototypen, von denen einer nicht-konvex ist.

Abschliessend möchte ich Herrn Professor Danzer und Herrn Professor Grünbaum meinen Dank für einige Anregungen aussprechen.

Egon Schulte, Universität Dortmund

LITERATURVERZEICHNIS

1 H.S.M. Coxeter: Regular polytopes, 3. Auflage. London 1948, Dover, New York 1973.
2 L. Danzer, B. Grünbaum und G.C. Shephard: Does every type of polyhedron tile three-space? Structural Topology, No. 8 (1983), S. 3–14.
3 B. Grünbaum: Convex polytopes. Interscience Publishers, New York 1967.
4 B. Grünbaum, P. Mani und G.C. Shephard: Tiling three-dimensional space with polyhedral tiles of a given isomorphism type. Erscheint demnächst.
5 B. Grünbaum und G.C. Shephard: Tilings with congruent tiles. Bull. Am. Math. Soc. *3* (3) (New Series), 951–973 (1980).
6 B. Grünbaum und G.C. Shephard: Tilings and Patterns. Freeman and Co., San Francisco, erscheint 1984.
7 D.G. Larman und C.A. Rogers: Durham symposium on the relations between infinite-dimensional and finitely dimensional convexity. Bull. Lond. Math. Soc. *8*, 1–33 (1976).
8 E. Schulte: Tiling three-space by combinatorially equivalent convex polytopes. Erscheint in Proc. Lond. Math. Soc.
9 E. Schulte: The existence of non-tiles and non-facets in three dimensions. Erscheint in J. Comb. Theory A.
10 G.C. Shephard: Problemliste der Konvexitätstagung in Wien im Juli 1981. Hrsg. v. P. Gruber.

© 1984 BirkhäuserVerlag, Basel 0013-6018/84/050113-05$1.50 + 0.20/0