Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 39 (1984)

Heft: 4

Rubrik: Aufgaben

Aufgaben

Aufgabe 898. Let $f \in C^n\,[0,1]$ with

$$f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0 \quad \text{for} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{1}$$

Show that for $p \geqslant 1$

$$\int_0^1 |f^{(n)}(x)|^p\,dx \geqslant (2n+1)^{-\alpha}\Big((2n+1)!/n!\Big)^p \left|\int_0^1 f(x)\,dx\right|^p$$

where $\alpha := \max\{1, p/2\}$. When does equality hold?

M. S. Klamkin und A. Meir, Edmonton, CDN

Lösung: Wegen der Voraussetzung (1) führen n partielle Integrationen zu

$$\int_0^1 f(x)\,dx = (-1)^n \int_0^1 Q_n(x) f^{(n)}(x)\,dx, \tag{2}$$

wobei Q_n ein zunächst noch beliebiges Polynom des genauen Grades n mit $1/n!$ als höchstem Koeffizienten ist. Wir wählen nun speziell

$$Q_n(x) := \frac{n!}{(2n)!} P_n(2x-1), \tag{3}$$

P_n das n-te Legendre-Polynom. Trägt man (3) in (2) ein, so wird die Ungleichung der Aufgabenstellung äquivalent zu

$$(2n+1)^{p-\alpha} \left|\int_0^1 P_n(2x-1) f^{(n)}(x)\,dx\right|^p \leqslant \int_0^1 |f^{(n)}(x)|^p\,dx. \tag{4}$$

Im Falle $n = 0$ ist (4) wegen $P_0 = 1$ gleichbedeutend mit

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right| \leqslant \left(\int_0^1 |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}. \tag{5}$$

Ist $p = 1$, so ist dies trivialerweise richtig, und Gleichheit gilt in (5) genau dann, wenn f in $[0,1]$ sein Vorzeichen nicht wechselt. Ist $p > 1$, so ist (5) als Spezialfall der Hölderschen Ungleichung richtig, und Gleichheit gilt in (5) genau dann, wenn f konstant ist, vgl. etwa ([1], S. 72). Sei hinfort $n \geqslant 1$.
Ist $p = 1$, so ist (4) äquivalent mit

$$\left|\int_0^1 P_n(2x-1) f^{(n)}(x)\,dx\right| \leqslant \int_0^1 |f^{(n)}(x)|\,dx. \tag{6}$$

Wegen $|P_n(2x-1)f^{(n)}(x)| \leqslant |f^{(n)}(x)|$ in $[0,1]$ ist (6) richtig. Ist überdies $f^{(n)} \neq 0$, so kann in der zuletzt angegebenen Ungleichung nicht stets Gleichheit eintreten, also gilt dann auch in (6) die strenge Ungleichung; ist aber $f^{(n)} = 0$, so gilt trivialerweise Gleichheit in (6). Wegen (1) ist $f^{(n)} = 0$ mit $f = 0$ äquivalent.

Sei jetzt $1 < p \leqslant 2$. Mit der Hölderschen Ungleichung ist

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 P_n(2x-1) f^{(n)}(x)\,dx \right| &\leqslant \left(\int_0^1 |P_n(2x-1)|^{p/(p-1)} dx \right)^{(p-1)/p} \left(\int_0^1 |f^{(n)}(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leqslant \left(\int_0^1 P_n(2x-1)^2 dx \right)^{(p-1)/p} \left(\int_0^1 |f^{(n)}(x)|^p dx \right)^{1/p} \qquad (7) \\ &= (2n+1)^{(1-p)/p} \left(\int_0^1 |f^{(n)}(x)|^p dx \right)^{1/p} \end{aligned}$$

wegen $p/(p-1) \geqslant 2$, $|P_n(2x-1)| \leqslant 1$ in $[0,1]$ sowie $\int_0^1 P_n(2x-1)^2 dx = 1/(2n+1)$. Die Ungleichung zwischen erstem und letztem Glied in (7) ist zu (4) äquivalent. Ist $1 < p < 2$, so ist sogar $p/(p-1) > 2$ und

$$\int_0^1 |P_n(2x-1)|^{p/(p-1)} dx < \int_0^1 P_n(2x-1)^2 dx:$$

Ist in diesem Falle $f^{(n)} \neq 0$, so ergibt sich aus (7), dass in (4) strenge Ungleichung gilt; bei $1 < p < 2$ gilt somit in (4) Gleichheit genau für $f^{(n)} = 0$, d.h. $f = 0$. Bei $p = 2$ ist die zweite Ungleichung in (7) eine Gleichheit, während die erste mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung übereinstimmt, und in ihr gilt bekanntlich Gleichheit genau dann, wenn

$$f^{(n)}(x) = c P_n(2x-1) \qquad (8)$$

ist mit einer reellen Konstanten c. Wegen der Rodriguez-Formel

$$P_n(2x-1) = (1/n!)(d/dx)^n (x^2 - x)^n$$

und (1) ist aus (8) induktiv leicht

$$f^{(n-j)}(x) = (c/n!)(d/dx)^{n-j}(x^2-x)^n \quad \text{für} \quad j = 0, \ldots, n$$

einzusehen, insbesondere $f(x) = c'(x^2 - x)^n$ mit einer neuen Konstanten c'.

Ist schliesslich $p > 2$, so hat man erneut nach Hölders Ungleichung

$$\int_0^1 f^{(n)}(x)^2 dx \leqslant \left(\int_0^1 |f^{(n)}(x)|^p dx \right)^{2/p} \qquad (9)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $f^{(n)}$ konstant ist. Wendet man nun (7) mit $p = 2$ an, so erhält man die erste Hälfte von

$$(2n+1)\left(\int_0^1 P_n(2x-1) f^{(n)}(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_0^1 f^{(n)}(x)^2\,dx \leqslant \left(\int_0^1 |f^{(n)}(x)|^p\,dx\right)^{2/p}, \tag{10}$$

während sich die zweite aus (9) ergibt; wegen $\alpha = p/2$ ist die Ungleichung zwischen den beiden äusseren Gliedern in (10) mit (4) gleichbedeutend. In der ersten bzw. zweiten Ungleichung (10) steht Gleichheit genau dann, wenn (8) zutrifft bzw. $f^{(n)}$ konstant ist. Also hat man in (4) bei $p < 2$ Gleichheit genau dann, wenn das c in (8) Null ist, d.h. wenn $f^{(n)} = 0$ und somit $f = 0$ gilt.

P. Bundschuh, Köln, BRD

LITERATURVERZEICHNIS

1 N. D. Kazarinoff: Analytic inequalities. Holt, Rinehart and Winston, New York 1961.

Bemerkung der Redaktion: In die Aufgabenstellung hatte sich bedauerlicherweise der Irrtum $\alpha := \min\{1, p/2\}$ eingeschlichen.

Einen weiteren Beitrag sandte W. Janous (Innsbruck, A).

Aufgabe 899. Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die Innenwinkel eines ebenen Dreiecks mit Inkreisradius r und Umkreisradius R. Man zeige, dass

$$\prod_{i=1}^{3} (3\alpha_i/\pi) \geqslant 2r/R.$$

Wann genau steht das Gleichheitszeichen?

V. D. Mascioni, Origlio

Lösung: Es gilt bekanntlich (siehe z. B. [1], S. 34)

$$8 \prod_{i=1}^{3} \sin(\alpha_i/2) = 2r/R.$$

Daher ist die behauptete Ungleichung äquivalent mit

$$(3/\pi)^3 \geqslant \prod_{i=1}^{3} \sin(\alpha_i/2)/(\alpha_i/2).$$

Weil die Funktion $f(x) := \log(\sin x/x)$ im Intervall $]0, \pi/2[$ streng konkav ist, folgt

$$\sum_{i=1}^{3} f(\alpha_i/2) \leqslant f\left(\sum_{i=1}^{3} (\alpha_i/2)\right) = 3f(\pi/6) = 3\log(3/\pi),$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$. Daraus ergibt sich unmittelbar die Behauptung.

W. Janous, Innsbruck, A

LITERATURVERZEICHNIS

1 E. Donath: Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks. Berlin 1976.

Weitere Lösungen sandten E. Braune (Linz, A), P. Bundschuh (Köln, BRD), H. Egli (Zürich), L. Kuipers (Sierre), P. Streckeisen (Zürich), Hj. Stocker (Wädenswil), N. Y. Wong (Hongkong).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Februar 1985* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68). Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44), Problem 862A (Band 36, S. 68), Problem 872A (Band 36, S. 175).

Aufgabe 910. Die Polynomfolge $(p_n)_{n\in\mathrm{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$p_1(x)=x, \qquad p_{n+1}(x)=x(1-x)p_n'(x); \qquad n\in\mathrm{N}.$$

Man ermittle für jedes $n\in\mathrm{N}$ die Menge der rationalen Nullstellen von p_n.

H. Müller, Hamburg, BRD

Aufgabe 911. Man zeige, dass für $x \geqslant 0$

$$\left|\frac{\pi}{4}-\arctan x\right| \leqslant \frac{\pi}{4}\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Wann genau steht das Gleichheitszeichen?

V. D. Mascioni, Origlio

Aufgabe 907. Correction, last line: read angles instead of sides.

Literaturüberschau

R. S. Millman und G. D. Parker: Geometry, A Metric Approach with Models. Undergraduate Texts in Mathematics, X und 355 Seiten, 259 Abbildungen, DM 78.-. Springer, New York, Heidelberg, Berlin 1981.
Hat man sich einmal entschlossen, in einer Anfängervorlesung an der Universität einen axiomatischen Aufbau der euklidischen Geometrie vorzuführen, so bieten sich dazu verschiedene Möglichkeiten: Klassischer Aufbau nach Hilbert, Spiegelungstheoretischer Aufbau nach Bachmann, Stufenaufbau nach Lingenberg, Verwendung von Vektorräumen nach Dieudonné ... Die Autoren des vorliegenden Buches bevorzugen (chacun à son goût) ein schon auf G. D. Birkhoff (1932) zurückgehendes Axiomensystem. Im wesentlichen geht es dabei darum, die Funktionen des Messlineals (scale) und die des Winkelmessers