Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 39 (1984)
Heft: 3

Rubrik: Aufgaben

Aufgaben

Aufgabe 896. If a_1, a_2, a_3 are the sides of a triangle $A_1A_2A_3$ and R_1, R_2, R_3 are the distances from an arbitrary point P in the plane of the triangle to the vertices A_1, A_2, A_3, prove that

$$\sum_{i=1}^{3} a_i R_i (a_i^4 + R_i^4) \geqslant 10 \prod_{i=1}^{3} a_i R_i .$$

M.S. Klamkin, Edmonton, CDN

Solution: We use complex numbers. Take P to be the origin of the complex plane and let A_1, A_2, A_3 be represented by the complex numbers u, v, w, respectively. The following identity is easily verified:

$$\sum \{u(v-w)^5 + u^5(v-w)\} = 10\, uvw \prod (v-w) .$$

Hence, using the triangle inequality we get

$$\sum |v-w|\ |u| \{|v-w|^4 + |u|^4\} \geqslant 10 \prod |u| \prod |v-w| .$$

This is the desired result, since $|v-w| = a_1$, $|u| = R_1$, etc.

L. Kuipers, Sierre

Comment by the proposer. It is easily seen that equality holds if the triangle is equilateral and it is conjectured that this is the only case for equality (assuming the triangle is non-degenerate).

Aufgabe 897. Für positive reelle x und natürliche n sei

$$S_n(x) := \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant x \\ (k,n)=1}} \mu(k)[x/k]$$

(μ: Möbiusfunktion, [ ]: Ganzteilfunktion). Man zeige: $S_n(x)$ ist gleich der Anzahl der Teiler t von $n^{[\log_2 x]}$ mit $t \leqslant x$.

K. Szabo, Miskolc, Ungarn

Lösung: Für $n \in \mathbf{N}$, $y \in \mathbf{R}_+$ sei $T_n(y) := \sum_{\substack{1 \leqslant t \leqslant y \\ t | n^{[\log_2 y]}}} 1$. Sei m eine beliebige natürliche Zahl $\leqslant x$.

Dann kann m eindeutig geschrieben werden in der Form $m = j \cdot t$ mit $(j,n) = 1$ und t enthält genau die Primfaktoren von m, die auch in n vorkommen. Ist $p^\lambda \| t$, so $2^\lambda \leqslant p^\lambda \leqslant x/j$ und damit $\lambda \leqslant [\log_2 x/j]$ und also $t | n^{[\log_2 x/j]}$. Daraus folgt

$$[x] = \sum_{m \leqslant x} 1 = \sum_{\substack{j \leqslant x \\ (j,n)=1}} \sum_{\substack{t \leqslant x/j \\ t | n^{[\log_2 x/j]}}} 1 = \sum_{\substack{j \leqslant x \\ (j,n)=1}} T_n(x/j) = \sum_{j \leqslant x} \chi_n(j) T_n(x/j) ,$$

wo χ_n den Hauptcharakter modulo n bezeichnet. Nach Definition von $S_n(x)$ in der Aufgabenstellung folgt daraus unter Berücksichtigung der vollständigen Multiplikativität von χ_n

$$S_n(x) = \sum_{k \leqslant x} \mu(k)\chi_n(k)[x/k] = \sum_{k \leqslant x} \sum_{j \leqslant x/k} \mu(k)\chi_n(k)\chi_n(j)T_n(x/jk)$$
$$= \sum_{l \leqslant x} \chi_n(l)T_n(x/l) \sum_{k/l} \mu(k) = \sum_{l \leqslant x} \chi_n(l)T_n(x/l)\delta_{1,l} = T_n(x)$$

mit den Kroneckerschen δ, was die Behauptung beweist.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Weitere Lösungen sandten L. Kuipers (Sierre), Kee-wai Leu (Hongkong), I. Merényi (Cluj, Rumänien), L. Cseh (Cluj, Rumänien).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Dezember 1984* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44), Problem 862A (Band 36, S. 68). Problem 872A (Band 36, S. 175), Aufgabe 880 (Band 37, S. 93).

Aufgabe 908. Show that the length of a side of the Morley triangle of a given triangle T is less than one third the length of the smallest side of T. (The Morley triangle of T is the equilateral triangle formed by the intersection in pairs of the angle trisectors of T.)

M. S. Klamkin, Alberta, CDN
R. Spira, Ashland, Oregon, USA

Aufgabe 909. Welche zahlentheoretische Funktion wird durch

$$f(n) := [2\sqrt{n}] - [\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}]; \qquad n \in \mathrm{N}$$

dargestellt?

H. Kappus, Rodersdorf

Literaturüberschau

J. Fresnel, M. van der Put: Géométrie Analytique Rigide et Applications. Progress in Mathematics, Band 18. XII und 215 Seiten. Fr. 30.–. Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart 1981.

Ce livre a pour origine un cours de troisième cycle. Dans la première partie, les auteurs introduisent de façon très claire les bases de la théorie des fonctions analytiques et des espaces analytiques sur un corps valué complet pour une valuation nonarchimédienne. La deuxième partie est consacrée à quelques applications importantes. La première application, qui donne la représentation analytique d'une courbe algébrique sur un corps valué complet, est aussi la motivation historique de cette théorie. M.-A. Knus