Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 39 (1984)
Heft: 3

Artikel: W-Kurven in der ebenen Lie-Geometrie. 2. Teil
Autor: Pinkall, U.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-38018

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

W-Kurven in der ebenen Lie-Geometrie (2. Teil)

4. Klassifikation der W-Kurvenscharen

Es gibt zwei Arten von Lie-W-Kurven, die mehr als nur eine einparametrige Gruppe von Lie-Transformationen gestatten: Die Kreise (deren Gruppe 7-dimensional ist) und diejenigen Kurven, die den Raumkurven 3. Ordnung in $\mathbb{P}^3$ entsprechen. Auf die letzteren gehen wir hier nicht näher ein.
Zur Klassifikation der übrigen W-Kurven bieten sich zunächst zwei Wege an: Zum einen könnte man das Problem als eine Frage der linearen Algebra ansehen: Man klassifiziere alle quadratischen Formen in einem vierdimensionalen Vektorraum, in dem eine nicht ausgeartete schiefsymmetrische Bilinearform ω ausgezeichnet ist. In dieser Form tritt das Problem auch in der klassischen Mechanik auf («quadratische Hamiltonfunktionen») und ist 1936 von J. Williamson [9] gelöst worden.
Zum andern kann man zurückgreifen auf die projektive Klassifikation der W-Kurven auf Quadriken, wie sie 1960 von M. Barner und H. Kunle [1] durchgeführt worden ist. Uns geht es hier vor allem um die Lie-geometrische Deutung der obigen Ergebnisse.
Wir gehen nun der Reihe nach die einzelnen Typen von W-Kurvenscharen durch. Die grobe Einteilung richtet sich nach dem projektiven Typ der betreffenden Quadrik in $\mathbb{P}^3$. Für die feinere Unterteilung suchen wir unter den Einparametergruppen von Projektivitäten, die eine Quadrik Q des jeweiligen Typs festlassen, diejenigen heraus, deren Bahnkurven auf Q einem nichtausgearteten linearen Komplex angehören. Dabei setzen wir einige Kenntnisse über nichteuklidische Bewegungsgruppen voraus, die man z. B. bei Felix Klein [4] nachlesen kann.
Dass die angegebenen Typen untereinander nicht Lie-äquivalent sind, folgt aus der Verschiedenheit der charakteristischen Polynome von X, die im folgenden aufgeführt sind. Die Vollständigkeit der Klassifikation ergibt sich aus der Art der Aufzählung.

Fall 1: Q ist vom Typ der Kugel

Wir werden im folgenden für jeden Typ einer W-Kurvenschar eine Basis $\mathfrak{b}_0, \ldots, \mathfrak{b}_3$ von U suchen, bezüglich der ω die Gestalt (15) hat, und bezüglich der die Matrix A der zur W-Kurvenschar gehörigen quadratischen Form besonders einfach wird. Die Gestalt, die die Matrizen A und $X := -EA$ bezüglich $\mathfrak{b}_0, \ldots, \mathfrak{b}_3$ annehmen, bezeichnen wir als «Normalform». In dem gerade betrachteten Fall I erhalten wir als Normalformen:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \omega & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\omega & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix},\quad X=-EA=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -\omega & 0\\ 0 & \omega & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\qquad(\omega>0)$$

$$\exp(tX)=\begin{pmatrix}\cosh t & 0 & 0 & \sinh t\\ 0 & \cos\omega t & -\sin\omega t & 0\\ 0 & \sin\omega t & \cos\omega t & 0\\ \sinh t & 0 & 0 & \cosh t\end{pmatrix}\tag{22}$$

$$p(\lambda)=\lambda^4+(1-\omega^2)\lambda^2-\omega^2$$

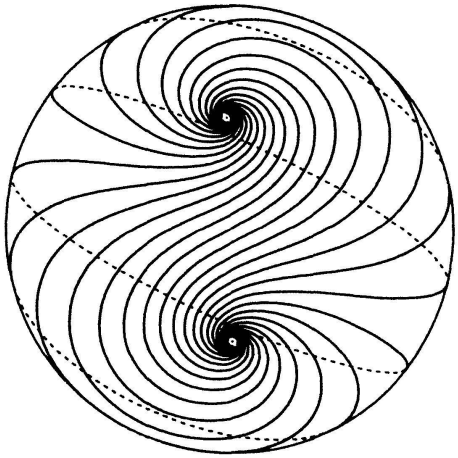
p bezeichnet immer das charakteristische Polynom der Matrix X. Wenn wie in (22) ein Parameter ω in der Normalform auftritt, so ist immer implizit behauptet, dass für verschiedene Werte von ω aus dem angegebenen Bereich (hier $\omega>0$) die entsprechenden W-Kurvenscharen nicht Lie-äquivalent sind.
Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{b}_3$ mit den Vektoren $\mathfrak{a}_1$, $i\,\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $i\,\mathfrak{a}_2$ zusammenfallen, wobei $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ eine normierte Basis von U ist. Mit Hilfe der Tabelle (19) finden wir dann für das zu der betrachteten W-Kurvenschar gehörige Richtungsfeld die Koordinatendarstellung

$$\begin{aligned}0&=x_0^2-x_3^2+\omega(x_1^2+x_2^2)\\ &=\frac{1+\omega}{2}(x_0^2+x_1^2)+\frac{1-\omega}{2}(x_0^2-x_1^2)\\ &\quad+\frac{\omega-1}{2}(x_2^2+x_3^2)+\frac{\omega+1}{2}(x_2^2-x_3^2)\\ &=\frac{1+\omega}{2}(z\,\bar z+\cos\varphi)+\frac{1-\omega}{2}(\langle z^2,u\rangle+1)\,.\end{aligned}\tag{23}$$

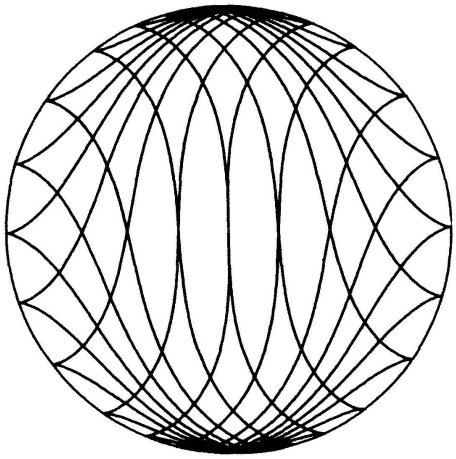
Um ein konkretes Beispiel herauszugreifen, betrachten wir speziell den Fall $\omega=1$. (23) vereinfacht sich hier zu

$$z\,\bar z+\cos\varphi=0\,.\tag{24}$$

Wegen $\cos\varphi\leqq 1$ liegen alle Linienelemente des Richtungsfeldes (24) im Einheitskreis. Dieser wird von dem Richtungsfeld gerade zweifach überdeckt, nur auf dem Rand ($z\,\bar z=1$) gibt es für φ modulo 2π nur die Lösung $\varphi=0$ (Fig. 4b).
Dem Richtungsfeld sieht man noch an, dass Q eine topologische Sphäre ist: Man erkennt zwei Kreisscheiben, die am Rand zusammengeheftet sind.
Die W-Kurven auf Q laufen asymptotisch gegen die Punkte $(1,0,0,1)=(1,i)$ und $(1,0,0,-1)=(1,-i)$ (siehe Fig. 4a). Dem entspricht, dass die Integralkurven des Richtungsfeldes (24) (d.h. die Lie-W-Kurven der betrachteten Schar) gegen die Linienelemente (z,u) mit $z=\pm i$, $u=-1$ konvergie-



Figur 4a



Figur 4b

ren. Aus (22) erhält man leicht explizite Parameterdarstellungen der W-Kurven: So ist etwa die W-Kurve

$$t \mapsto \exp(tX)\,\mathfrak{r}_0\,, \qquad \mathfrak{r}_0 = \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} \tag{25}$$

(X wie in (22) mit $\omega = 1$) gegeben durch

$$\mathfrak{r}(t) = \begin{pmatrix} \sinh t + i\cos t \\ \sin t \;\; + i\cosh t \end{pmatrix}$$

$$z(t) = \frac{\sinh t + i\cos t}{\sin t + i\cosh t}\,. \tag{26}$$

Fall II: Q ist vom Typ des einschaligen Hyperboloids

Eine Projektivität π: $\mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$, die Q festlässt, induziert in jeder der beiden Erzeugendenscharen von Q eine Projektivität (siehe [4] S. 111 ff.). Je nach der Anzahl der Fixerzeugenden in der jeweiligen Schar können diese beiden von π induzierten Projektivitäten elliptisch, parabolisch, hyperbolisch oder die Identität sein. Entsprechendes gilt für Einparametergruppen von Projektivitäten $t \mapsto \exp(tX)$, die Q festlassen. Es ist klar, was gemeint ist, wenn wir X elliptisch-elliptisch oder hyperbolisch-identisch etc. nennen.
Der Fall, dass X parabolisch-parabolisch ist, bleibt hier ausser Betracht, weil die Bahnkurven in diesem Fall Kegelschnitte, also keine Komplexkurven sind.
Die drei Fälle, in denen eine der beiden Erzeugendenscharen geradenweise fest bleibt, kommen zwar als Lie-Einparametergruppen vor, sie liefern aber keine interessanten W-Kurven. Die Bahnkurven auf Q sind hier Geraden, auf die Möbiusebene übertragen also Kreise. Es bleiben noch fünf Fälle übrig:

II a) X ist elliptisch-elliptisch

Normalform:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\omega&0&0\\0&0&\omega&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad X=-EA=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&-\omega&0\\0&\omega&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\qquad(\omega<0,\ \omega\neq-1)$$

$$\exp(tX)=\begin{pmatrix}\cos t&0&0&-\sin t\\0&\cos\omega t&-\sin\omega t&0\\0&\sin\omega t&\cos\omega t&0\\\sin t&0&0&\cos t\end{pmatrix}\tag{27}$$

$$p(\lambda)=\lambda^4+(\omega^2+1)\lambda^2+\omega^2.$$

Richtungsfeld:

$$\begin{aligned}0&=x_0^2+\omega x_1^2+\omega x_2^2+x_3^2\\&=\frac{1+\omega}{2}(x_0^2+x_1^2)+\frac{1-\omega}{2}(x_0^2-x_1^2)\\&=\frac{\omega+1}{2}(x_2^2+x_3^2)+\frac{\omega-1}{2}(x_2^2-x_3^2)\\&=\frac{1+\omega}{2}(z_1\bar z_1+z_2\bar z_2)+\frac{1-\omega}{2}\operatorname{Re}(z_1^2-z_2^2).\end{aligned}\tag{28}$$

Zur geometrischen Beschreibung des Richtungsfeldes und seiner Integralkurven ist es zweckmässig, vorher noch die Möbiustransformation

$$z=\frac{\tilde z-1}{\tilde z+1}\quad\text{oder}\quad z_1=\frac{1}{\sqrt2}(\tilde z_1-\tilde z_2),\qquad z_2=\frac{1}{\sqrt2}(\tilde z_1+\tilde z_2)\tag{29}$$

anzuwenden. Das transformierte Richtungsfeld hat die Gleichung

$$\begin{aligned}0&=\frac{1+\omega}{2}(\tilde z_1\bar{\tilde z}_1+\tilde z_2\bar{\tilde z}_2)+\frac{1-\omega}{2}\operatorname{Re}(2\tilde z_1\tilde z_2)\\&=\frac{1+\omega}{2}(\tilde z\bar{\tilde z}+1)+(1-\omega)\langle\tilde z,\tilde u\rangle\end{aligned}\tag{30}$$

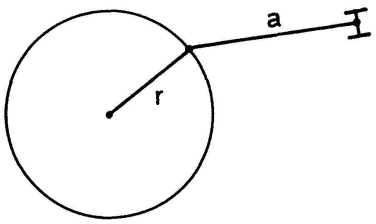
oder, wenn wir wieder z statt $\tilde z$ schreiben:

$$\begin{aligned}0&=z\bar z+1+\frac{1-\omega}{1+\omega}2\langle z,u\rangle\\&=\left(z+\frac{1-\omega}{1+\omega}u\right)\overline{\left(z+\frac{1-\omega}{1+\omega}u\right)}+1-\left(\frac{1-\omega}{1+\omega}\right)^2.\end{aligned}\tag{31}$$

Das Richtungsfeld besteht also aus allen Linienelementen (z, u) mit der folgenden Eigenschaft: Trägt man von z aus den Vektor $\frac{1-\omega}{1+\omega} u$ ab, so gelangt man zu einem Punkt auf dem Kreis um den Ursprung mit Radius

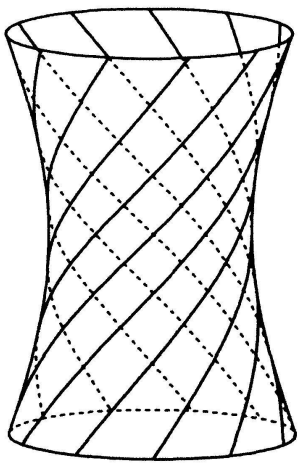
$r = \sqrt{\left(\frac{1-\omega}{1+\omega}\right)^2 - 1}$. Aus $\omega < 0$ folgt $\left(\frac{1-\omega}{1+\omega}\right)^2 - 1 > 0$ und $a := \frac{1-\omega}{1+\omega} > r$.

Es gibt für dieses Richtungsfeld eine interessante mechanische Deutung: Ein Mann geht auf einem Kreis vom Radius r herum und zieht dabei an einer Stange der Länge a einen Wagen.

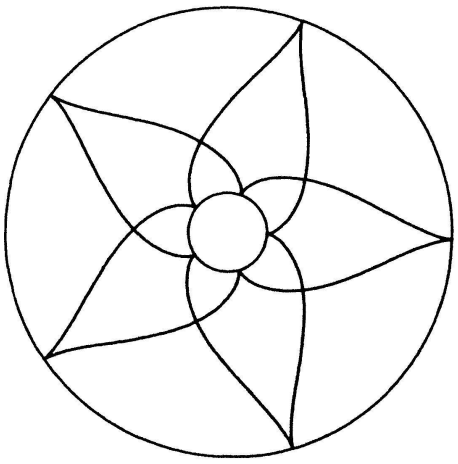


Figur 5

Die Bahn, die der Wagen beschreibt, ist offenbar Integralkurve eines Richtungsfeldes der obigen Art. Ein weiterer Gesichtspunkt ergibt sich, wenn man um die Punkte eines Kreises vom Radius r Kreise vom Radius a schlägt. Die Orthogonaltrajektorien der so entstandenen Kreisschar sind dann die gesuchten Lie-W-Kurven.



Figur 6a



Figur 6b

Die W-Kurven sind geschlossen oder nicht, je nachdem ω rational oder irrational ist.

IIb) X ist elliptisch-parabolisch

Normalform:

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right), \qquad X=-EA=\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\exp(tX)=\left(\begin{array}{cc|cc} \cos t & \sin t & 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 & 0 \\ \hline t\sin t & t\cos t & \cos t & -\sin t \\ t\cos t & -t\sin t & \sin t & \cos t \end{array}\right) \tag{32}$$

$$p(\lambda)=(\lambda^2+1)^2.$$

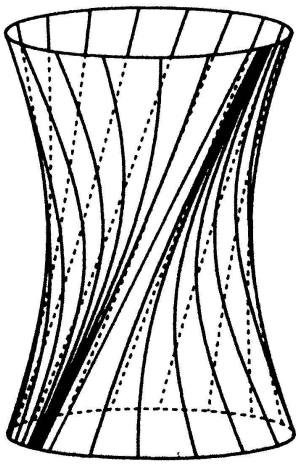
Richtungsfeld:

$$\begin{aligned} 0 &= x_0^2+x_1^2+2(x_0x_2-x_1x_3) \\ &= z\bar{z}+2\langle z,u\rangle. \end{aligned} \tag{33}$$

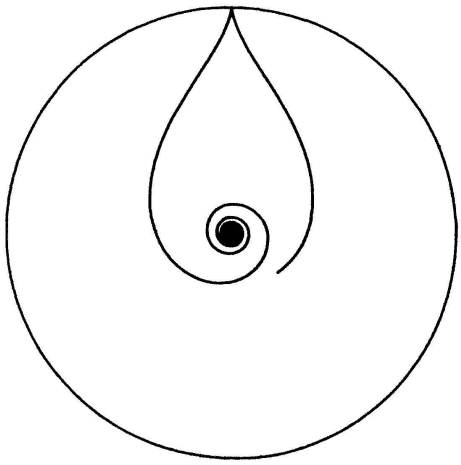
Dieses Richtungsfeld entsteht aus (31) im Grenzfall $\omega \to -\infty$, d.h. für $r=a$. Sowohl die mechanische Interpretation der W-Kurven als auch ihre Deutung als Orthogonaltrajektorien einer Kreisschar bleiben gültig.

Auf Q schmiegen sich die W-Kurven sowohl für $t \to +\infty$ als auch für $t \to -\infty$ an die (einzige) Fixerzeugende von Q an (Fig. 7a). Dem entspricht, dass in der Möbiusebene die W-Kurven gegen den Ursprung konvergieren, der ja Lie-geometrisch als orientierter Kreis aufgefasst werden muss (Fig. 7b).

Bei der Inversion am Einheitskreis werden aus den Kreisen, deren Orthogonaltrajektorien unsere W-Kurven sind, die Tangenten des Einheitskreises.



Figur 7a



Figur 7b

Weil die Inversion winkeltreu ist, werden aus den W-Kurven Orthogonaltrajektorien dieser Tangenten, d. h. Kreisevolventen.

II c) X ist elliptisch-hyperbolisch

Normalform:

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\omega \\ \hline \omega & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\omega & 0 & -1 \end{array}\right) \qquad X=-EA=\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & \omega & 0 & 1 \\ -\omega & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -\omega \\ 1 & 0 & \omega & 0 \end{array}\right) \qquad (\omega>0)$$

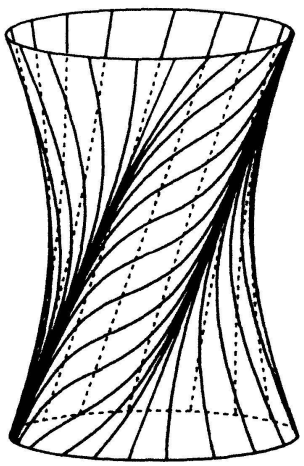
$$\exp(tX)=\left(\begin{array}{cc|cc} \cosh t & 0 & 0 & \sinh t \\ 0 & \cosh t & \sinh t & 0 \\ \hline 0 & \sinh t & \cosh t & 0 \\ \sinh t & 0 & 0 & \cosh t \end{array}\right)$$

$$\cdot\left(\begin{array}{cc|cc} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) & 0 & 0 \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ 0 & 0 & \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{array}\right)$$

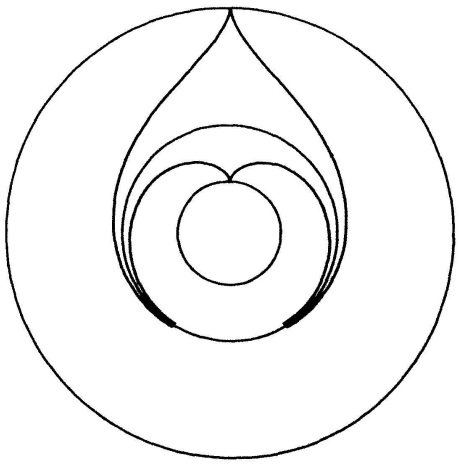
$$p(\lambda)=\lambda^4+2(\omega^2-1)\lambda^2+(\omega^2+1)^2.$$

Richtungsfeld:

$$\begin{aligned} 0 &= x_0^2+x_1^2-x_2^2-x_3^2+2\omega(x_0x_2-x_1x_3) \\ &= z\bar{z}-1+2\omega\langle z,u\rangle \\ &= (z+\omega u)(\overline{z+\omega u})-1-\omega^2. \end{aligned}$$



Figur 8a



Figur 8b

Wieder kann man das Richtungsfeld wie in IIa deuten, hier aber mit $a < r$. Auf $Q \subset \mathbb{P}^3$ schmiegen sich die W-Kurven für $t \to \infty$ an die beiden Fixgeraden auf Q an. Die beiden orientierten Kreise, die diesen Geraden in der Möbiusebene entsprechen, erscheinen in Fig. 8b als die beiden Orientierungen desselben unorientierten Kreises.

II d) X ist hyperbolisch-hyperbolisch

Normalform:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\omega > 0 \quad \omega \neq 1)$$

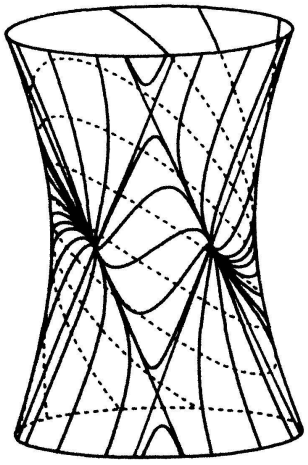
$$\exp(tX) = \begin{pmatrix} \cosh t & 0 & 0 & \sinh t \\ 0 & \cosh(\omega t) & \sinh(\omega t) & 0 \\ 0 & \sinh(\omega t) & \cosh(\omega t) & 0 \\ \sinh t & 0 & 0 & \cosh t \end{pmatrix} \tag{34}$$

$$p(\lambda) = \lambda^4 - (1 + \omega^2)\lambda^2 + \omega^2 .$$

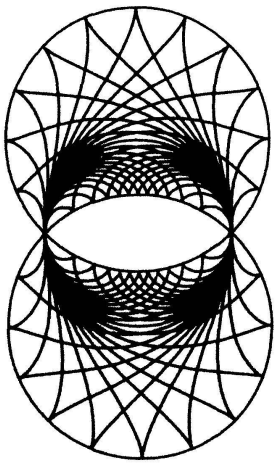
Richtungsfeld:

$$\begin{aligned} 0 &= x_0^2 + \omega x_1^2 - \omega x_2^2 - x_3^2 \\ &= \frac{1+\omega}{2}(z\bar{z} - 1) + \frac{1-\omega}{2}\langle z^2 + 1, u\rangle . \end{aligned} \tag{35}$$

Um eine anschauliche Vorstellung von der W-Kurvenschar zu gewinnen, fragen wir nach dem Ort der Punkte, in denen es genau ein Element des Richtungsfeldes gibt. Mit Hilfe von (21) kann man zeigen, dass der gesuchte Ort in zwei Kreise K_1, K_2 durch die Punkte $\pm i$ zerfällt. Die W-Kurvenschar



Figur 9a



Figur 9b

besteht aus den Orthogonaltrajektorien einer Schar von Kreisen, die K_1 und K_2 berühren (Fig. 9b).
Die vier Fixgeraden auf $Q \subset \mathbb{P}^3$ bilden ein windschiefes Viereck. Eine der vier Ecken des Vierseits fungiert als Quelle, die gegenüberliegende Ecke als Senke für die Strömung auf Q (Fig. 9a).
In der Möbiusebene entsprechen den vier Fixgeraden auf Q vier orientierte Kreise, nämlich die Punkte $\pm i$ und die beiden Orientierungen des Einheitskreises. Diese Kreise gehören selbst auch zu den W-Kurven der Schar.

II e) X ist hyperbolisch-parabolisch

Normalform:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right), \quad X = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

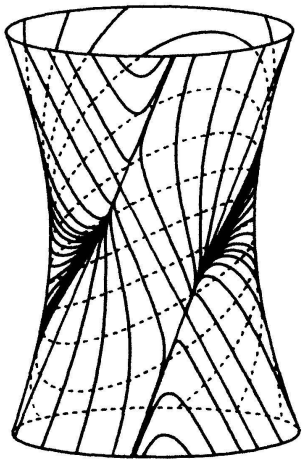
$$\exp(tX) = \left(\begin{array}{cc|cc} e^t & 0 & t\,e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & t\,e^{-t} \\ \hline 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{array}\right) \tag{36}$$

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)^2 .$$

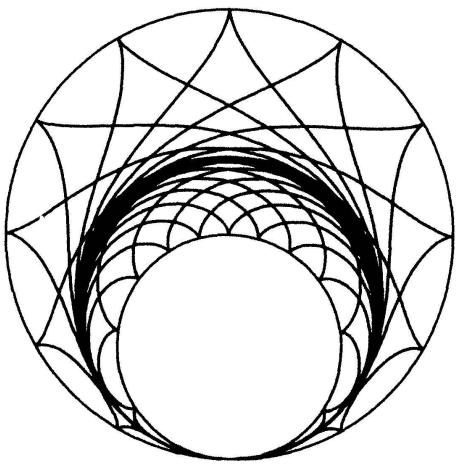
Richtungsfeld:

$$\begin{aligned} 0 &= x_1 x_2 - x_0 x_3 - x_2 x_3 \\ &= \operatorname{Im}\left(z + \frac{1}{2} u\right). \end{aligned} \tag{37}$$

Wie in den Beispielen zu IIa)–c) die W-Kurven Schleppkurven des Kreises waren, so haben wir hier Schleppkurven der Geraden, also Traktrizen. Fig. 10b zeigt das Bild einer solchen Schar von Traktrizen unter einer Inversion.



Figur 10a



Figur 10b

Fall III: Q ist ein Kegel

Für den Nachweis, dass alle W-Kurven auf Kegeln, die gleichzeitig Komplexkurven sind, in einem der beiden folgenden Typen enthalten sind, verweisen wir auf die Arbeit [1] von M. Barner und H. Kunle.

III a) Gewöhnliche Schraubenlinien

Normalform:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

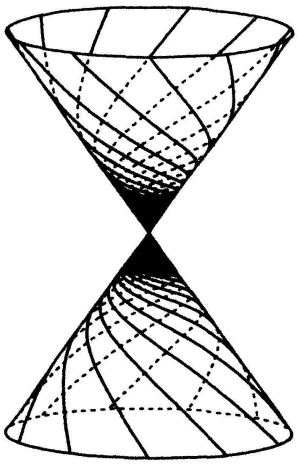
$$\exp(tX)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos t & \sin t & 0\\ 0 & -\sin t & \cos t & 0\\ t & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{38}$$

$$p(\lambda)=\lambda^2(\lambda^2+1)\,.$$

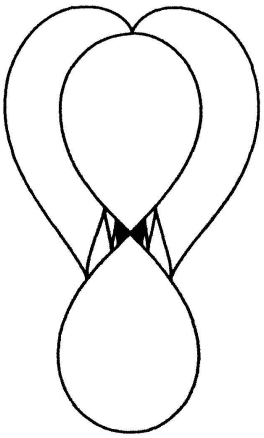
Richtungsfeld:

$$\begin{aligned}0&=x_0^2-x_1^2-x_2^2\\ &=\langle z^2,u\rangle-\frac{1}{2}(1+\cos\varphi)\,.\end{aligned} \tag{39}$$

Stellt man sich Q als Zylinder im euklidischen Raum vor, so sind die Bahnkurven auf Q gewöhnliche Schraubenlinien. In der Möbiusebene konvergieren die W-Kurven für $t\to+\infty$ und $t\to-\infty$ gegen das Linienelement $(z,u)=(0,-1)$, das der Kegelspitze entspricht (Fig. 11).



Figur 11a



Figur 11b

III b) Hyperbel-Schraubenlinien

Normalform:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\qquad X=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

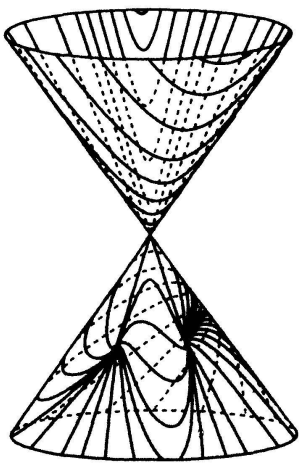
$$\exp(tX)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cosh t&\sinh t&0\\0&\sinh t&\cosh t&0\\t&0&0&1\end{pmatrix} \tag{40}$$

$$p(\lambda)=\lambda^2(\lambda^2-1)\,.$$

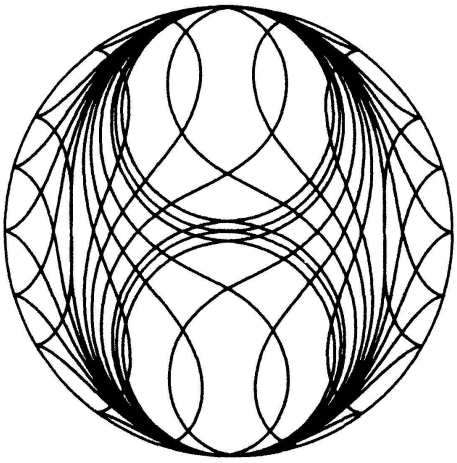
Richtungsfeld:

$$\begin{aligned}0&=x_0^2+x_1^2-x_2^2\\&=z\bar{z}-\frac{1}{2}(1+\cos\varphi)\,.\end{aligned} \tag{41}$$

Für $t\to\infty$ konvergieren alle W-Kurven gegen das Linienelement $(z,u)=(i,1)$, für $t\to-\infty$ gegen $(z,u)=(-i,1)$ (siehe Fig. 12b).
Es bleiben noch fünf Fälle zu diskutieren: Q ist nullteilig, ein nullteiliger Kegel, ein imaginäres Ebenenpaar, ein reelles Ebenenpaar, eine doppeltzählende Ebene. In den ersten drei Fällen gibt es keine nichtkonstanten W-Kurven. In den letzten beiden Fällen sind die W-Kurven orientierte Kreise, die den Komplexgeraden in den Ebenen, in die Q zerfällt, entsprechen.



Figur 12a



Figur 12b

Wir geben noch eine Methode an, mit der man bei gegebenem X und A entscheiden kann, welcher Typ vorliegt. Wenn A vom Rang $\leqq 2$ oder Q nullteilig ist, liegt einer der Fälle vor, die wir nicht ausführlich beschrieben haben. Ansonsten sieht man am Vorzeichen der Determinante von A, ob Fall I ($\det A < 0$), Fall II ($\det A > 0$) oder Fall III ($\det A = 0$) vorliegt. Für die feinere Unterscheidung muß man das charakteristische Polynom p von X betrachten. Die obige Klassifikation zeigt (man kann dies auch leicht direkt einsehen), dass p immer von der Form ist

$$p(\lambda) = \lambda^4 + b\,\lambda^2 + \det X\,. \tag{42}$$

Ein Vergleich mit den oben angegebenen Normalformen ergibt mit $D := b^2 - 4 \det X$ die folgende Tabelle:

Fall I	$\det A < 0$	$D > 0$	$b \in \mathbb{R}$
Fall II a	$\det A > 0$	$D > 0$	$b > 0$
b		$D = 0$	$b > 0$
c		$D < 0$	$b \in \mathbb{R}$
d		$D > 0$	$b < 0$
e		$D = 0$	$b < 0$
Fall III a	$\det A = 0$	$D > 0$	$b > 0$
b			$b < 0$

(43)

U. Pinkall, Math. Institut Universität Freiburg i. Br.

LITERATURVERZEICHNIS

1 M. Barner und H. Kunle: Über W-Kurven auf Quadriken. Monatshefte für Mathematik 1961, S. 106–142.
2 W. Blaschke: Vorlesungen über Differentialgeometrie. Bd. III, Berlin 1929.
3 G. Bol: Projektive Differentialgeometrie. Bd. I, Göttingen 1950.
4 F. Klein: Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie. Berlin 1928.
5 S. Lie: Geometrie der Berührungstransformationen. Leipzig 1896.
6 S. Sasaki und T. Suguri: On the problems of equivalence in the Lie's higher circle geometry and of minimal curves in the conformal geometry. Tohoku Math. J. 1940, S. 77–86.
7 W. Schwarz: Kreisscharen in der ebenen Lie-Geometrie. Dissertation, Freiburg 1982.
8 K. Strubecker: Über die Lieschen Abbildungen der Linienelemente der Ebene auf die Punkte des Raumes. Monatshefte f. Math. u. Phys. 1935, S. 309–376.
9 J. Williamson: On an algebraic problem concerning the normal forms of linear dynamical systems. Amer. J. of Math. 1936, S. 141–163.

© 1984 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/84/030067-12$1.50 + 0.20/0