**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft
**Band:** 39 (1984)
**Heft:** 1

**Artikel:** Ein einfacher Beweis des Satzes von Euler-Schläfli
**Autor:** Nef, Walter
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-38010

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 14.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires - Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik*
*und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

El. Math. Band 39 Nr. 1 Seiten 1-24 Basel, 10. Januar 1984

# Ein einfacher Beweis des Satzes von Euler-Schläfli

## 1. Einleitung

In den Jahren 1750 und 1751 hat Leonhard Euler [3, 4] den berühmten Satz veröffentlicht, dass in jedem konvexen Polyeder des 3dimensionalen Raumes die Summe der Ecken- und der Flächenzahl um 2 grösser ist als die Kantenzahl.
Rund 100 Jahre später hat Ludwig Schläfli [22] den Satz auf Polyeder im $d$-dimensionalen Raum ausgedehnt. In der Terminologie von [10] (vgl. den folgenden Abschnitt 2.3) kann der *Satz von Euler-Schläfli* so formuliert werden:
*Für jedes Polytop $P \subset \mathbf{R}^d$ gilt*

$$\sum_{i=0}^{d} (-1)^i s_i = 1, \tag{1}$$

*wo $s_i$ die Anzahl der i-dimensionalen Seiten von P bedeutet.*
Dabei wird dem Polytop $P$, sofern es ein eigentliches ist (d.h. nicht in einer Hyperebene enthalten), genau eine $d$-dimensionale Seite zugeschrieben, so dass $s_d = 1$ zu setzen ist.
Schläflis Beweis ist allerdings erst in neuerer Zeit von Bruggesser und Mani [2] lückenlos durchgeführt worden, nachdem der Satz bekanntlich schon früher im Rahmen der algebraischen Topologie auf ganz anderem Wege bewiesen worden war.
Einen neuen Zugang zum Satz und weiteren Problemen hat H. Hadwiger mit den Arbeiten [11] bis [16] eröffnet, zusammen mit P. Mani in den beiden letzten. Er beruht auf einer neuartigen Definition der Eulerschen Charakteristik als additives Funktional auf dem (die Polytope enthaltenden) «Konvexring». Die Arbeiten von Hadwiger sind von verschiedenen Autoren weitergeführt und verallgemeinert worden, vor allem von Groemer [5-9], Klee [17] und Lenz [18], vgl. auch [20]. Im folgenden soll ein, wie wir glauben, besonders einfacher und anschaulicher Beweis des Satzes von Euler-Schläfli vorgestellt werden. Er beruht auf einer ebenfalls auf Hadwiger [14] zurückgehenden Ausdehnung des (jetzt auf Polyeder beschränkten) Definitionsbereichs der Eulerschen Charakteristik, derart, dass dieser auch die relativ offenen konvexen Polyeder (im folgenden als Zellen bezeichnet) umfasst. Dadurch wird es möglich, den Satz direkt aus gewissen Zellenzerlegungen eines Polytops abzulesen.

## 2. Grundbegriffe

### 2.1 *Ebenen und Halbräume*

Ist $f(x)=\sum_{k=0}^{d} a_k \xi_k+\beta$ eine nichtkonstante lineare Funktion auf dem $d$-dimensionalen Raum $\mathbf{R}^d$, so bezeichnen wir:

— mit $F^0$ die Hyperebene $f^{-1}(0)$,

— mit $F^+, F^-$ die offenen Halbräume $f^{-1}(\mathbf{R}^+), f^{-1}(-\mathbf{R}^+)$ (wo $\mathbf{R}^+=\{\lambda\in\mathbf{R}: \lambda>0\}$),

— mit $\operatorname{clos} F^+=F^+\cup F^0=\operatorname{cpl} F^-$ und $\operatorname{clos} F^-=F^-\cup F^0=\operatorname{cpl} F^+$ die zugehörigen abgeschlossenen Halbräume.

Als *Ebene* bezeichnen wir jeden nichtleeren Durchschnitt von Hyperebenen. $\mathbf{R}^d$ selber ist eine Ebene, ebenso jede aus einem einzigen Punkt bestehende Menge.

### 2.2 *Zellen*

Unter einer Zelle verstehen wir einen nichtleeren Durchschnitt einer Ebene $M$ mit endlich vielen offenen Halbräumen $F_j^+$:

$$C=M\cap\bigcap_{j=1}^{r} F_j^+\neq\phi. \tag{2}$$

Jede Ebene ist eine Zelle, insbesondere jede aus einem einzigen Punkt $x\in\mathbf{R}^d$ bestehende Menge.

Die Zellen sind konvexe Mengen. Da aus (2) folgt

$$\operatorname{aff} C=M \tag{3}$$

(vgl. [19], Satz 7; 4), ist jede Zelle eine offene Teilmenge ihrer affinen Hülle, weshalb wir sie als *relativ offen* bezeichnen.

### 2.3 *Polyeder*

Als *Polyeder* bezeichnen wir jede Vereinigung von endlich vielen Zellen. Leicht einzusehen ist, dass jedes Polyeder sogar als Vereinigung von endlich vielen paarweise disjunkten Zellen darstellbar ist. Eine solche Partition nennen wir *Zellenzerlegung* des Polyeders.

Die Zellen selber sind natürlich Polyeder, und zwar relativ offene und konvexe. Es lässt sich zeigen, dass umgekehrt auch jedes relativ offene und konvexe Polyeder eine Zelle ist (vgl. [19], Satz 7; 3).

Nebenbei sei hier ein Resultat von H. Bieri [1] erwähnt: Eine Teilmenge $Q\subset\mathbf{R}^d$ ist genau dann ein Polyeder, wenn $Q$ und $\operatorname{cpl} Q$ Vereinigungen von endlich vielen relativ offenen Mengen sind.

Eine wichtige Klasse von Polyedern wird durch die *polyedrischen Mengen* (vgl. [10], S. 26) gebildet, d. h. durch die nichtleeren Durchschnitte einer Ebene $N$ und endlich vielen abgeschlossenen Halbräumen:

$$P = N \cap \bigcap_{k=1}^{s} \operatorname{clos} G_k^+. \tag{4}$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit (vgl. [19], 7; (4)) nehmen wir im folgenden an:

$$P \not\subset G_k^0 \qquad (k = 1, \ldots, s). \tag{5}$$

Dass die polyedrischen Mengen Polyeder sind, folgt aus $\operatorname{clos} G_k^+ = G_k^0 \cup G_k^+$. Daraus ergibt sich nämlich, dass die durch (4) dargestellte polyedrische Menge $P$ die (disjunkte) Vereinigung aller nichtleeren unter den Mengen

$$S = N \cap \bigcap_{k=1}^{s} G_k^{\sigma_k}, \qquad \text{wo} \quad \sigma_k = + \text{ oder } = 0 \, (k = 1, \ldots, s) \tag{6}$$

ist. Diese Mengen sind Zellen. Sie sind im übrigen die (als relativ offen aufgefassten) *Seiten* des Polyeders $P$ (vgl. [19], Satz 7; 8). Ist $\mathfrak{S}$ die Menge aller Seiten der polyedrischen Menge $P$, so ist also

$$P = \bigcup_{S \in \mathfrak{S}} S \tag{7}$$

eine Zellenzerlegung von $P$.
Für die durch (6) dargestellte Seite $S \in \mathfrak{S}$ ist nach (3)

$$\operatorname{aff} S = N \cap \bigcap_{\sigma_k = 0} G_k^0. \tag{8}$$

Wir setzen

$$\dim S := \dim \operatorname{aff} S. \tag{9}$$

Offensichtlich ist $\dim S \leq \dim N$ für jede Seite $S$ von $P$. Es gibt genau eine Seite $S_0$, deren Dimension $= \dim N$ ist, nämlich der relativ offene Kern

$$S_0 = \operatorname{relint} P = N \cap \bigcap_{k=1}^{s} G_k^+ \tag{10}$$

([19], Satz 7; 2).
Die polyedrischen Mengen sind offensichtlich *abgeschlossene konvexe* Polyeder. Man kann zeigen, dass umgekehrt jedes abgeschlossene konvexe Polyeder eine polyedrische Menge ist ([19], Satz 7; 2).

Jede *beschränkte* polyedrische Menge ist die konvexe Hülle gewisser endlich vieler Punkte (seiner Ecken), also (vgl. [10], S. 31) ein *Polytop*. Umgekehrt ist jedes Polytop eine beschränkte polyedrische Menge (vgl. [19], Sätze 7; 2–7; 18–7; 25).
Wir können also den Satz von Euler-Schläfli wie folgt formulieren:

*Für jede beschränkte polyedrische Menge gilt* (1). (11)

## 3. Die Eulersche Charakteristik

Die *Eulersche Charakteristik* $\chi(P)$ eines Polyeders $P$ kann wie folgt definiert werden:

$$\chi(\phi)=0, \tag{12.1}$$

$$\chi(C)=(-1)^{\dim C}, \quad \text{wenn } C \text{ eine Zelle ist}, \tag{12.2}$$

$$\chi(P)=\sum_{k=1}^{t}\chi(C_k), \quad \text{wenn } P=\bigcup_{k=1}^{t} C_k \tag{12.3}$$

eine Zellenzerlegung von $P$ ist.
Für den einfachen Beweis (insbesondere dafür, dass das so definierte $\chi(P)$ von der Zellenzerlegung in (12.3) unabhängig ist) vergleiche man [21].
Ist $P$ eine polyedrische Menge, so wird also nach (7)

$$\chi(P)=\sum_{S\in\mathfrak{S}}\chi(S)=\sum_{S\in\mathfrak{S}}(-1)^{\dim S}=\sum_{i=0}^{d}(-1)^i s_i, \tag{13}$$

wo $s_i$ die Anzahl der Seiten von $P$ mit $\dim S=i$ bedeutet.

## 4. Beweis des Satzes von Euler-Schläfli

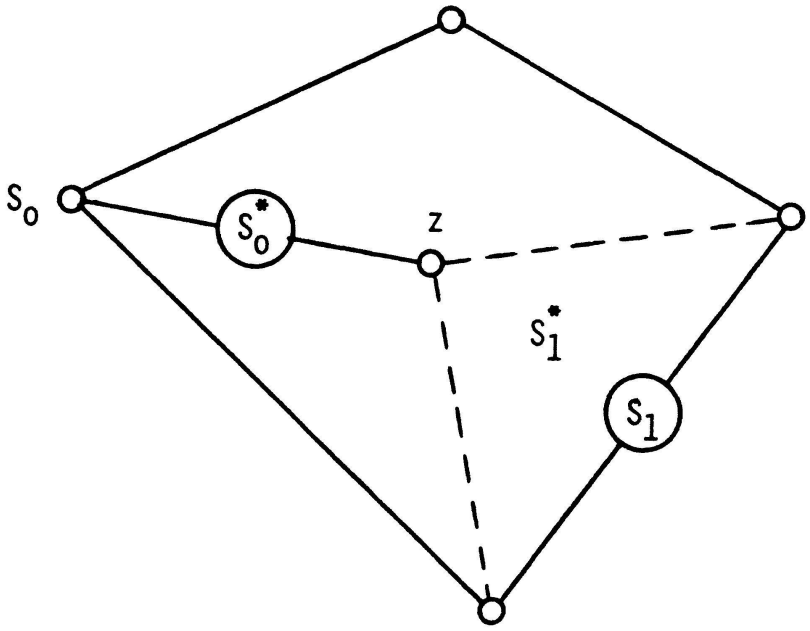
Nach (11) und (13) bleibt zu zeigen, dass

$$\chi(P)=1 \tag{14}$$

ist für jede beschränkte polyedrische Menge $P$.
Diesen Nachweis erbringen wir durch Betrachtung einer zweiten Zellenzerlegung von $P$, die aus (7) durch eine geeignete Unterteilung von $S_0=\operatorname{relint} P$ entsteht. Dazu wählen wir ein $z\in\operatorname{relint} P$. Sei $\mathfrak{S}_0$ die Menge aller Seiten $S\neq\operatorname{relint} P$ von $P$, d.h. (vgl. (10)) mit $\dim S<\dim S_0$. Jeder Seite $S\in\mathfrak{S}_0$ ordnen wir die relativ offene Pyramide $S^*$ «mit Spitze $z$ und Grundfläche $S$» zu, genauer:

$$S^*=\{y\in\mathbf{R}^d\colon y=z+\lambda(x-z) \quad \text{mit} \quad x\in S, 0<\lambda<1\}. \tag{15}$$

Ist z. B. $S$ eine 1dimensionale Seite von $P$ (also eine offene Strecke), so ist $S^*$ ein offenes Dreieck in der durch $S$ und $z$ erzeugten Ebene. Ist $S$ eine 0dimensionale Seite (eine Ecke), so ist $S^*$ eine offene Strecke auf der durch $S$ und $z$ erzeugten Geraden. Die Figur veranschaulicht für den Fall $\dim P = 2$ die Mengen $S_1^*$ und $S_2^*$ zu zwei ausgewählten Seiten $S_1$ und $S_2$ der Dimensionen 0 und 1.




Anschaulich einleuchtend und leicht zu beweisen ist nun:

Für jede Seite $S \in \mathfrak{S}_0$ ist $S^*$ eine Zelle und $\dim S^* = \dim S + 1$. (16.1)
Die Zellen $S \in \mathfrak{S}_0, S^*$ (mit $S \in \mathfrak{S}_0$) und $\{z\}$ bilden eine Zellenzerlegung von $P$. (16.2)

Wir verzichten auf den ganz und gar routinemässigen Beweis.

Aus (16) folgt nun mit (12):

$$\chi(P) = \chi(\{z\}) + \sum_{S \in \mathfrak{S}_0} \left(\chi(S) + \chi(S^*)\right) = \chi(\{z\}) = 1, \tag{17}$$

womit der Satz (vgl. (14)) bewiesen ist.

Walter Nef, Bern

LITERATURVERZEICHNIS

1 H. Bieri: Eine Charakterisierung der Polyeder. El. Math. *35*, 143-144 (1980).
2 H. Bruggesser und P. Mani: Shellable decompositions of cells and spheres. Math. scand. *29*, 197-205 (1971).
3 L. Euler: Elementa doctrinae solidorum. Opera omnia, series prima, Vol. 26, S. 71-93. Orell Füssli, Zürich 1953.
4 L. Euler: Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita. Opera omnia, series prima, Vol. 26, S. 94-108. Orell Füssli, Zürich 1953.

5 H. Groemer: Eulersche Charakteristik, Projektionen und Quermassintegrale. Math. Ann. *198*, 23-56 (1972).
6 H. Groemer: Über einige Invarianzeigenschaften der Eulerschen Charakteristik. Comment. Math. Helv. *48*, 87-99 (1973).
7 H. Groemer: On the Euler characteristic in spaces with a separability property. Math. Ann. *211*, 315-321 (1974).
8 H. Groemer: The Euler characteristic and related functionals on convex surfaces. Geometriae dedicata *4*, 91-104 (1975).
9 H. Groemer: On the extension of additive functionals on classes of convex sets. Pacific J. Math. *75*, 397-410 (1978).
10 B. Grünbaum: Convex Polytopes. Wiley, New York 1967.
11 H. Hadwiger: Eulers Charakteristik und kombinatorische Geometrie. J. reine angew. Math. *194*, 101-110 (1955).
12 H. Hadwiger: Eine Schnittrekursion für die Eulersche Charakteristik euklidischer Polyeder mit Anwendungen innerhalb der kombinatorischen Geometrie. El. Math. *23*, 121-132 (1968).
13 H. Hadwiger: Notiz zur Eulerschen Charakteristik offener und abgeschlossener euklidischer Polyeder. Studia Sci. Math. hung. *4*, 385-387 (1969).
14 H. Hadwiger: Erweiterter Polyedersatz und Euler-Shepardsche Additionstheoreme. Abh. Math. Seminar Univ. Hamburg *39*, 120-129 (1973).
15 H. Hadwiger und P. Mani: On the Euler characteristic of spherical polyhedra and the Euler relation. Mathematika *19*, 139-143 (1972).
16 H. Hadwiger und P. Mani: On polyhedra with extremal Euler characteristic. J. Comb. Theory (ser. A) *17*, 345-349 (1974).
17 V. Klee: The Euler characteristic in combinatorial Geometry. Am. Math. Monthly *70*, 119-127 (1963).
18 H. Lenz: Mengenalgebra und Eulersche Charakteristik. Abh. Math. Seminar Univ. Hamburg *34*, 135-147 (1970).
19 W. Nef: Beiträge zur Theorie der Polyeder, mit Anwendungen in der Computergraphik. Herbert Lang, Bern 1978.
20 W. Nef: Zur Eulerschen Charakteristik allgemeiner, insbesondere konvexer Polyeder. Result. Math. *3*, 64-69 (1980).
21 W. Nef: Zur Einführung der Eulerschen Charakteristik. Monatsh. Math. *92*, 41-46 (1981).
22 L. Schläfli: Theorie der vielfachen Kontinuität. Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd. 1, S. 189-191, Birkhäuser, Basel 1950.

© 1984 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/84/010001-06$1.50+0.20/0

# Eine Ramsey-Zahl für fünf Knoten und acht Kanten

Als klassische Ramsey-Zahl $r(p)$ bezeichnet man die kleinste natürliche Zahl $n$, für die bei jeder 2-Färbung der Kanten des vollständigen Graphen mit $n$ Knoten, $K_n$, ein einfarbiger Teilgraph $K_p$ vorkommt. Es sind $r(3) = 6$ und $r(4) = 18$ wohlbekannt. Jedoch schon für $p = 5$ weiß man bisher nur $42 \leqq r(5) \leqq 55$.

In der Literatur sind verschiedene Variationen der Ramsey-Zahlen zu finden [2, 4]. Hier sollen eine andere Abwandlung und erste Ergebnisse für $p = 5$ vorgestellt werden. Ähnliche Verallgemeinerungen wurden schon in [1, 3] behandelt.