**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

**Band:** 38 (1983)

Heft: 6

**Artikel:** Zerlegung von regulären 2n-Ecken

**Autor:** Pfeiffer, H. / Romer, A.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-37200

## Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 14.12.2025

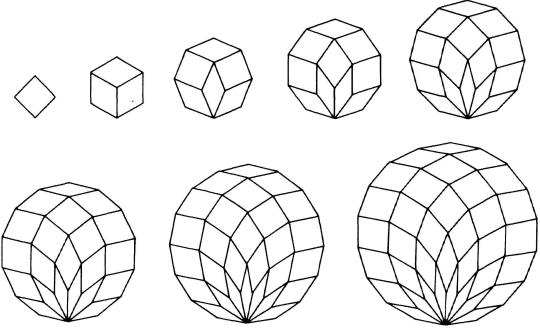
ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

El. Math., Vol. 38, 1983

# Elementarmathematik und Didaktik

## Zerlegung von regulären 2n-Ecken

Im Rahmen einer experimentellen Untersuchung über Tragwerke von Sonnenspiegeln entdeckten wir eine interessante Eigenschaft regulärer 2*n*-Ecke:



Figur 1

Ein reguläres 2n-Eck kann in  $\binom{n}{2}$  Rhomben gleicher Seitenlänge zerlegt werden (Fig. 1).

Dieses Rhomben-Puzzle streift verschiedene Gebiete des Elementarunterrichts: Symmetrien, Kombinatorik, Flächenzerlegung, arithmetische Folgen.

Zum Beweis der Zerlegungseigenschaft denken wir uns ein ebenes Gelenkmodell gemäss Figur 2 (Figur für n=5) mit Gelenken in den Punkten  $A_{ij}$  und gleich langen Stangen dazwischen. Im Rhombus  $A_{i,j}A_{i+1,j}A_{i+2,j+1}A_{i+1,j+1}$  (Fig. 3) führen wir die Winkel  $a_{ij}$  und  $\beta_{ij}$  ein. Wir deformieren nun das Gelenkmodell so, dass

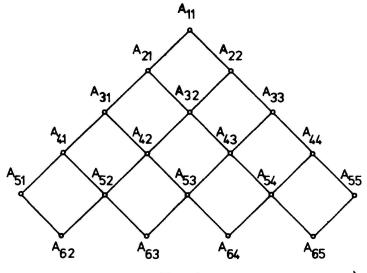
$$a_{i,j} = \left(1 - \frac{i}{n}\right)\pi$$
 und  $\beta_{i,j} = \frac{i}{n}\pi$ .

Dies ist widerspruchsfrei möglich, weil sich für einen innern Punkt  $A_{i,j}$  die Winkelsumme

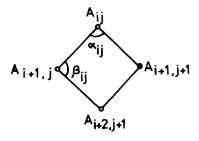
$$a_{i,j} + \beta_{i-1,j} + a_{i-2,j-1} + \beta_{i-1,j-1}$$

$$= \left(1 - \frac{i}{n}\right)\pi + \frac{i-1}{n}\pi + \left(1 - \frac{i-2}{n}\right)\pi + \frac{i-1}{n}\pi = 2\pi$$

ergibt.



Figur 2



Figur 3

In den Randpunkten erhält man folgende Innenwinkel:

a) Der Randpunkt A<sub>11</sub> hat den Innenwinkel

$$a_{1,1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\pi.$$

b) In den Randpunkten $A_{i,1}, i \in \{2, ..., n-1\}$  erhält man den Innenwinkel

$$a_{i,1} + \beta_{i-1,1} = \left(1 - \frac{i}{n}\right)\pi + \frac{i-1}{n}\pi = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\pi.$$

Analog verfährt man für die Randpunkte $A_{i,i}$ ,  $i \in \{2, ..., n-1\}$ .

c) In den Randpunkten  $A_{n,1}$  und  $A_{n,n}$  erhält man die Innenwinkel

$$\beta_{n-1,1} = \beta_{n-1,n-1} = \frac{n-1}{n} \pi = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \pi.$$

d) Wegen

$$a_{n,j} = \left(1 - \frac{n}{n}\right)\pi = 0$$

El. Math., Vol. 38, 1983

fallen die Punkte  $A_{n+1,2},...,A_{n+1,n}$  zusammen. In diesem Punkt erhält man den Innenwinkel

$$(n-1)a_{n-1,j}=(n-1)\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\pi=\left(1-\frac{1}{n}\right)\pi.$$

Das deformierte Gelenkmodell bildet also ein regelmässiges 2 n-Eck.

Wir danken Herrn H. Walser (Frauenfeld) für die grosszügige Mithilfe bei der Überarbeitung des Aufsatzes; die originelle Idee des Gelenkmodells stammt von ihm.

H. Pfeiffer und A. Romer, Minusio

© 1983 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/83/060157-03\$1.50+0.20/0

## Ein Zerlegungssatz für punktsymmetrische konvexe Vielecke

Ein punktsymmetrisches Vieleck hat eine gerade Eckenzahl. Wir bezeichnen die 2n-Ecken  $(n \ge 2)$  mit  $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$  und beweisen mit Induktion nach n folgenden Satz:

Ein punktsymmetrisches konvexes 2 n-Eck ist in  $\binom{n}{2}$  Parallelogramme zerlegbar.

- I. Für n=2 ist der Satz trivial.
- II. Der Satz sei wahr für (n-1).

Wir verschieben nun die Ecken  $B_1, ..., B_n$  um den Vektor  $\overline{a}_1 = \overline{B_n A_1}$  und erhalten mit den Bildpunkten  $B'_1, ..., B'_n$  eine Zerlegung des 2n-Eckes in (n-1) Parallelogramme  $B_k B_{k+1} B'_{k+1} B'_k$ ,  $k \in \{1, ..., n-1\}$  und ein 2(n-1)-Eck  $A_1, ..., A_n = B'_1, ..., B'_n = A_1$ . Dieses 2(n-1)-Eck ist als Durchschnitt der beiden 2n-Ecke  $A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_n$  und  $A'_1, ..., A'_n, B'_1, ..., B'_n$  ebenfalls konvex; ferner hat es ein Symmetriezentrum, nämlich das um  $a_1/2$  verschobene Symmetriezentrum des ursprünglichen 2n-Eckes.

Das 2(n-1)-Eck ist also nach Induktionsvoraussetzung in  $\binom{n-1}{2}$  Parallelogramme zerlegbar. Damit ist das 2n-Eck in  $(n-1)+\binom{n-1}{2}=\binom{n}{2}$  Parallelogramme zerlegbar.

#### Zusätze

1. Es sei 
$$\vec{a}_1 = \vec{B}_n \vec{A}_1$$
,  $\vec{a}_2 = \vec{A}_1 \vec{A}_2$ , ...,  $\vec{a}_k = \vec{A}_{k-1} \vec{A}_k$ , ...,  $\vec{a}_n = \vec{A}_{n-1} \vec{A}_n$ .

Die  $\left(\frac{n}{2}\right)$  Parallelogramme der Zerlegung sind diejenigen Parallelogramme, welche durch je zwei Vektoren aus  $\{a_1, ..., a_n\}$  aufgespannt werden.