Über die konvexe Hülle von Zufallspunkten in Eibereichen

Es bezeichne $V_n^{(d)}(K)$ den Erwartungswert des Volumens der konvexen Hülle von n Punkten, die zufällig nach der Gleichverteilung und unabhängig voneinander in einem (eigentlichen) d-dimensionalen konvexen Körper K gewählt werden.
Explizite Werte von $V_n^{(d)}(K)$ für $d=2$ und beliebiges n sind nur in den Fällen bekannt, dass K ein Polygon [1] oder eine Ellipse [2] ist. Beispielsweise gilt:

K (Flächeninhalt 1)	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$
Dreieck	$\frac{1}{12}$ $=0{,}08333$	$\frac{1}{6}$ $=0{,}16667$	$\frac{43}{180}$ $=0{,}23889$	$\frac{3}{10}$ $=0{,}30000$
Parallelogramm	$\frac{11}{144}$ $=0{,}07639$	$\frac{11}{72}$ $=0{,}15278$	$\frac{79}{360}$ $=0{,}21944$	$\frac{199}{720}$ $=0{,}27639$
Reguläres Sechseck	$\frac{289}{3888}$ $=0{,}07433$	$\frac{289}{1944}$ $=0{,}14866$	$\frac{149347}{699840}$ $=0{,}21340$	$\frac{62647}{233280}$ $=0{,}26855$
Kreis oder Ellipse	$\frac{35}{48\pi^2}$ $=0{,}07388$	$\frac{35}{24\pi^2}$ $=0{,}14776$	$\frac{175}{72\pi^2}-\frac{23023}{6912\pi^4}$ $=0{,}21207$	$\frac{175}{48\pi^2}-\frac{23023}{2304\pi^4}$ $=0{,}26682$

Für $d=3$ und beliebiges n kennt man $V_n^{(d)}(K)$ nur für die Ellipsoide [2]; die ersten nichttrivialen Werte sind:

K (Volumen 1)	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$
Kugel oder Ellipsoid	$\frac{9}{715}$ $=0{,}01259$	$\frac{9}{286}$ $=0{,}03147$	$\frac{3105}{58786}$ $=0{,}05282$	$\frac{531}{7106}$ $=0{,}07473$

In höheren Dimensionen ist bisher anscheinend nur der Spezialfall $n=d+1$ für die Ellipsoide gelöst worden:

$$V_d^{(d-1)}(K)=\frac{1}{2^{d-1}}\binom{d}{d/2}^d\binom{d^2}{d^2/2}^{-1}V(K),$$

wobei $V(K)$ das Volumen des Ellipsoids K bezeichnet. Für gerades d ist also $V_d^{(d-1)}(K)/V(K)$ rational und für ungerades d wegen $(m-1/2)!=\sqrt{\pi}\,(2m)!/2^{2m}m!$ ein rationales Vielfaches von $\pi^{-(d-1)}$. Dieses schöne Resultat stammt von Kingman [7]. Weiteres hat Groemer [3, 4] nachgewiesen, dass $V_n^{(d)}(K)$ bei festem d und festem n genau dann sein Minimum unter allen konvexen Körpern K gleichen Volumens annimmt, wenn K ein Ellipsoid ist. Einen Überblick über verwandte Resultate findet man bei Gruber [5], Kendall und Moran [6], Klee [8] und Reed [9].

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, dass für beliebige ebene konvexe Körper K

$$V_4^{(2)}(K)=2\,V_3^{(2)}(K)$$

und für beliebige dreidimensionale konvexe Körper K

$$V_5^{(3)}(K)=\frac{5}{2}\,V_4^{(3)}(K)$$

erfüllt ist.

Satz 1. *Es sei K ein ebener konvexer Körper. Dann gilt:*

$$V_4^{(2)}(K)=2\,V_3^{(2)}(K).$$

Beweis: O.B.d.A. sei der Flächeninhalt von K gleich 1. Es bezeichne $E_{n+1}^{(2)}(K)$ den Erwartungswert der Eckpunktanzahl der konvexen Hülle H_{n+1} von $n+1$ in K zufällig und unabhängig voneinander gewählten Punkten. Die Wahrscheinlichkeit, dass einer dieser Punkte Eckpunkt von H_{n+1} ist, stimmt mit der Wahrscheinlichkeit überein, dass dieser Punkt nicht in der konvexen Hülle H_n der übrigen n Punkte liegt, was mit Wahrscheinlichkeit $1-V_n^{(2)}(K)$ der Fall ist. Da alle Punkte unabhängig und identisch verteilt sind, folgt $E_{n+1}^{(2)}(K)=(n+1)\left(1-V_n^{(2)}(K)\right)$ beziehungsweise

$$V_n^{(2)}(K)=1-\frac{1}{n+1}\,E_{n+1}^{(2)}(K).$$

Die Anzahl der Eckpunkte von H_{n+1} ist zugleich die Anzahl der Seiten von H_{n+1}. Die Verbindungsstrecke P_1P_2 zweier Zufallspunkte P_1 und P_2 ist Seite von H_{n+1}, wenn alle übrigen $n-1$ Punkte auf ein und derselben Seite der Gerade $g(P_1,P_2)$ durch P_1 und P_2 liegen, was mit Wahrscheinlichkeit $\tilde{V}^{n-1}+(1-\tilde{V})^{n-1}$ der Fall ist, wobei $\tilde{V}=\tilde{V}(P_1,P_2)$ den durch $g(P_1,P_2)$ abgetrennten kleineren Flächeninhalt bezeichnet. (Die Wahrscheinlichkeit, dass drei Punkte auf einer Gerade liegen, ist null.) Da es $\binom{n+1}{2}$ Möglichkeiten gibt, aus $n+1$ Punkten zwei auszuwählen, und die Punkte unabhängig und identisch verteilt sind, folgt

$$E_{n+1}^{(2)}(K)=\binom{n+1}{2}\int_K\int_K[\tilde{V}^{n-1}+(1-\tilde{V})^{n-1}]\,dP_1\,dP_2,$$

$$V_n^{(2)}(K)=1-\frac{n}{2}\int_K\int_K[\tilde{V}^{n-1}+(1-\tilde{V})^{n-1}]\,dP_1\,dP_2.$$

Aus dieser Darstellung erhalten wir

$$V_4^{(2)}(K)=1-2\int_K\int_K[\tilde{V}^3+(1-\tilde{V})^3]\,dP_1\,dP_2$$

$$=1-3\int_K\int_K\left[\tilde{V}^2+(1-\tilde{V})^2-\frac{1}{3}\right]dP_1\,dP_2$$

$$=2\left(1-\frac{3}{2}\int_K\int_K[\tilde{V}^2+(1-\tilde{V})^2]\,dP_1\,dP_2\right)$$

$$=2\,V_3^{(2)}(K).$$

Satz 2. *Es sei K ein dreidimensionaler konvexer Körper. Dann gilt:*

$$V_5^{(3)}(K)=\frac{5}{2}\,V_4^{(3)}(K).$$

Beweis: Wir nehmen wieder o.B.d.A. an, dass das Volumen von K gleich 1 ist. Es bezeichne $E_{n+1}^{(3)}(K)$ den Erwartungswert der Eckpunktanzahl und $F_{n+1}^{(3)}(K)$ den Erwartungswert der Facettenanzahl der konvexen Hülle H_{n+1} von $n+1$ in K zufällig und unabhängig voneinander gewählten Punkten. Ähnlich wie im Beweis von Satz 1 zeigt man

$$V_n^{(3)}(K)=1-\frac{1}{n+1}\,E_{n+1}^{(3)}(K),$$

$$F_{n+1}^{(3)}(K)=\binom{n+1}{3}\int_K\int_K\int_K[\tilde{V}^{n-2}+(1-\tilde{V})^{n-2}]\,dP_1\,dP_2\,dP_3,$$

wobei $\tilde{V}=\tilde{V}(P_1,P_2,P_3)$ das Volumen des durch die Ebene durch P_1,P_2 und P_3 von K abgetrennten kleineren Teils bezeichnet. Da H_{n+1} fast sicher simplizial ist, beträgt die Kantenanzahl fast sicher das $3/2$-fache der Facettenanzahl. Aus der Eulerschen Polyederformel folgt daher

$$E_{n+1}^{(3)}(K)=\frac{1}{2}\,F_{n+1}^{(3)}(K)+2,$$

und wir erhalten

$$V_n^{(3)}(K)=1-\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\,F_{n+1}^{(3)}(\mathrm{K})+2\right)$$

$$=1-\frac{2}{n+1}-\frac{(n-1)n}{12}\int_K\int_K\int_K[\tilde{V}^{n-2}+(1-\tilde{V})^{n-2}]\,dP_1\,dP_2\,dP_3.$$

Aus dieser Darstellung ergibt sich

$$V_5^{(3)}(K) = \frac{2}{3} - \frac{5}{3} \int\limits_K \int\limits_K \int\limits_K [\tilde{V}^3 + (1-\tilde{V})^3]\, dP_1\, dP_2\, dP_3$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{5}{2} \int\limits_K \int\limits_K \int\limits_K \left[\tilde{V}^2 + (1-\tilde{V})^2 - \frac{1}{3}\right] dP_1\, dP_2\, dP_3$$

$$= \frac{5}{2}\left(\frac{3}{5} - \int\limits_K \int\limits_K \int\limits_K [\tilde{V}^2 + (1-\tilde{V})^2]\, dP_1\, dP_2\, dP_3\right)$$

$$= \frac{5}{2} V_4^{(3)}(K).$$

C. Buchta, Institut für Analysis, Technische Mathematik und Versicherungsmathematik, Technische Universität Wien

LITERATURVERZEICHNIS

1 C. Buchta: Zufallspolygone in konvexen Vielecken. J. reine angew. Math., im Druck.
2 C. Buchta: Das Volumen von Zufallspolyedern im Ellipsoid. Eingereicht.
3 H. Groemer: On some mean values associated with a randomly selected simplex in a convex set. Pacific J. Math. *45*, 525–533 (1973).
4 H. Groemer: On the mean value of the volume of a random polytope in a convex set. Arch. Math. *25*, 86–90 (1974).
5 P.M. Gruber: Approximation of convex bodies. In: P.M. Gruber, J.M. Wills, ed.: Convexity and its applications. Birkhäuser, Basel 1983.
6 M.G. Kendall und P.A.P. Moran: Geometrical probability. Griffin, London 1963.
7 J.F.C. Kingman: Random secants of a convex body. J.Appl. Prob. *6*, 660–672 (1969).
8 V. Klee: What is the expected volume of a simplex whose vertices are chosen at random from a given convex body? Am. Math. Monthly *76*, 286–288 (1969).
9 W.J. Reed: Random points in a simplex. Pacific J. Math. *54*, 183–198 (1974).

 0013-6018/83/060153-04$1.50+0.20/0