

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 38 (1983)  
**Heft:** 6

**Artikel:** Über die konvexe Hülle von Zufallspunkten in Eibereichen  
**Autor:** Buchta, C.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-37199>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Über die konvexe Hülle von Zufallspunkten in Eibereichen

Es bezeichne  $V_n^{(d)}(K)$  den Erwartungswert des Volumens der konvexen Hülle von  $n$  Punkten, die zufällig nach der Gleichverteilung und unabhängig voneinander in einem (eigentlichen)  $d$ -dimensionalen konvexen Körper  $K$  gewählt werden.

Explizite Werte von  $V_n^{(d)}(K)$  für  $d=2$  und beliebiges  $n$  sind nur in den Fällen bekannt, dass  $K$  ein Polygon [1] oder eine Ellipse [2] ist. Beispielsweise gilt:

$K$ (Flächeninhalt 1)	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$
Dreieck	$\frac{1}{12}$ $= 0,08333$	$\frac{1}{6}$ $= 0,16667$	$\frac{43}{180}$ $= 0,23889$	$\frac{3}{10}$ $= 0,30000$
Parallelogramm	$\frac{11}{144}$ $= 0,07639$	$\frac{11}{72}$ $= 0,15278$	$\frac{79}{360}$ $= 0,21944$	$\frac{199}{720}$ $= 0,27639$
Reguläres Sechseck	$\frac{289}{3888}$ $= 0,07433$	$\frac{289}{1944}$ $= 0,14866$	$\frac{149347}{699840}$ $= 0,21340$	$\frac{62647}{233280}$ $= 0,26855$
Kreis oder Ellipse	$\frac{35}{48\pi^2}$ $= 0,07388$	$\frac{35}{24\pi^2}$ $= 0,14776$	$\frac{175}{72\pi^2} - \frac{23023}{6912\pi^4}$ $= 0,21207$	$\frac{175}{48\pi^2} - \frac{23023}{2304\pi^4}$ $= 0,26682$

Für  $d=3$  und beliebiges  $n$  kennt man  $V_n^{(d)}(K)$  nur für die Ellipsoide [2]; die ersten nichttrivialen Werte sind:

$K$ (Volumen 1)	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$
Kugel oder Ellipsoid	$\frac{9}{715}$ $= 0,01259$	$\frac{9}{286}$ $= 0,03147$	$\frac{3105}{58786}$ $= 0,05282$	$\frac{531}{7106}$ $= 0,07473$

In höheren Dimensionen ist bisher anscheinend nur der Spezialfall  $n=d+1$  für die Ellipsoide gelöst worden:

$$V_d^{(d-1)}(K) = \frac{1}{2^{d-1}} \left( \frac{d}{d/2} \right)^d \left( \frac{d^2}{d^2/2} \right)^{-1} V(K),$$

wobei  $V(K)$  das Volumen des Ellipsoids  $K$  bezeichnet. Für gerades  $d$  ist also  $V_d^{(d-1)}(K)/V(K)$  rational und für ungerades  $d$  wegen  $(m-1/2)! = \sqrt{\pi} (2m)!/2^{2m} m!$  ein rationales Vielfaches von  $\pi^{-(d-1)}$ . Dieses schöne Resultat stammt von Kingman [7]. Weiteres hat Groemer [3, 4] nachgewiesen, dass  $V_n^{(d)}(K)$  bei festem  $d$  und festem  $n$  genau dann sein Minimum unter allen konvexen Körpern  $K$  gleichen Volumens annimmt, wenn  $K$  ein Ellipsoid ist. Einen Überblick über verwandte Resultate findet man bei Gruber [5], Kendall und Moran [6], Klee [8] und Reed [9].

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, dass für beliebige ebene konvexe Körper  $K$

$$V_4^{(2)}(K) = 2 V_3^{(2)}(K)$$

und für beliebige dreidimensionale konvexe Körper  $K$

$$V_5^{(3)}(K) = \frac{5}{2} V_4^{(3)}(K)$$

erfüllt ist.

**Satz 1.** Es sei  $K$  ein ebener konvexer Körper. Dann gilt:

$$V_4^{(2)}(K) = 2 V_3^{(2)}(K).$$

Beweis: O.B.d.A. sei der Flächeninhalt von  $K$  gleich 1. Es bezeichne  $E_{n+1}^{(2)}(K)$  den Erwartungswert der Eckpunktanzahl der konvexen Hülle  $H_{n+1}$  von  $n+1$  in  $K$  zufällig und unabhängig voneinander gewählten Punkten. Die Wahrscheinlichkeit, dass einer dieser Punkte Eckpunkt von  $H_{n+1}$  ist, stimmt mit der Wahrscheinlichkeit überein, dass dieser Punkt nicht in der konvexen Hülle  $H_n$  der übrigen  $n$  Punkte liegt, was mit Wahrscheinlichkeit  $1 - V_n^{(2)}(K)$  der Fall ist. Da alle Punkte unabhängig und identisch verteilt sind, folgt  $E_{n+1}^{(2)}(K) = (n+1)(1 - V_n^{(2)}(K))$  beziehungsweise

$$V_n^{(2)}(K) = 1 - \frac{1}{n+1} E_{n+1}^{(2)}(K).$$

Die Anzahl der Eckpunkte von  $H_{n+1}$  ist zugleich die Anzahl der Seiten von  $H_{n+1}$ . Die Verbindungsstrecke  $P_1 P_2$  zweier Zufallspunkte  $P_1$  und  $P_2$  ist Seite von  $H_{n+1}$ , wenn alle übrigen  $n-1$  Punkte auf einer und derselben Seite der Gerade  $g(P_1, P_2)$  durch  $P_1$  und  $P_2$  liegen, was mit Wahrscheinlichkeit  $\tilde{V}^{n-1} + (1 - \tilde{V})^{n-1}$  der Fall ist, wobei  $\tilde{V} = \tilde{V}(P_1, P_2)$  den durch  $g(P_1, P_2)$  abgetrennten kleineren Flächeninhalt bezeichnet. (Die Wahrscheinlichkeit, dass drei Punkte auf einer Geraden liegen, ist null.) Da es  $\binom{n+1}{2}$  Möglichkeiten gibt, aus  $n+1$  Punkten zwei auszuwählen, und die Punkte unabhängig und identisch verteilt sind, folgt

$$E_{n+1}^{(2)}(K) = \binom{n+1}{2} \int \int_{KK} [\tilde{V}^{n-1} + (1 - \tilde{V})^{n-1}] dP_1 dP_2,$$

$$V_n^{(2)}(K) = 1 - \frac{n}{2} \int \int_{KK} [\tilde{V}^{n-1} + (1 - \tilde{V})^{n-1}] dP_1 dP_2.$$

Aus dieser Darstellung erhalten wir

$$\begin{aligned}
 V_4^{(2)}(K) &= 1 - 2 \iint_{KK} [\tilde{V}^3 + (1 - \tilde{V})^3] dP_1 dP_2 \\
 &= 1 - 3 \iint_{KK} \left[ \tilde{V}^2 + (1 - \tilde{V})^2 - \frac{1}{3} \right] dP_1 dP_2 \\
 &= 2 \left( 1 - \frac{3}{2} \iint_{KK} [\tilde{V}^2 + (1 - \tilde{V})^2] dP_1 dP_2 \right) \\
 &= 2 V_3^{(2)}(K).
 \end{aligned}$$

**Satz 2.** Es sei  $K$  ein dreidimensionaler konvexer Körper. Dann gilt:

$$V_3^{(3)}(K) = \frac{5}{2} V_4^{(3)}(K).$$

Beweis: Wir nehmen wieder o.B.d.A. an, dass das Volumen von  $K$  gleich 1 ist. Es bezeichne  $E_{n+1}^{(3)}(K)$  den Erwartungswert der Eckpunktanzahl und  $F_{n+1}^{(3)}(K)$  den Erwartungswert der Facettenanzahl der konvexen Hülle  $H_{n+1}$  von  $n+1$  in  $K$  zufällig und unabhängig voneinander gewählten Punkten. Ähnlich wie im Beweis von Satz 1 zeigt man

$$\begin{aligned}
 V_n^{(3)}(K) &= 1 - \frac{1}{n+1} E_{n+1}^{(3)}(K), \\
 F_{n+1}^{(3)}(K) &= \binom{n+1}{3} \iint_{KKK} [\tilde{V}^{n-2} + (1 - \tilde{V})^{n-2}] dP_1 dP_2 dP_3,
 \end{aligned}$$

wobei  $\tilde{V} = \tilde{V}(P_1, P_2, P_3)$  das Volumen des durch die Ebene durch  $P_1, P_2$  und  $P_3$  von  $K$  abgetrennten kleineren Teils bezeichnet. Da  $H_{n+1}$  fast sicher simplizial ist, beträgt die Kantenanzahl fast sicher das  $3/2$ -fache der Facettenanzahl. Aus der Eulerschen Polyederformel folgt daher

$$E_{n+1}^{(3)}(K) = \frac{1}{2} F_{n+1}^{(3)}(K) + 2,$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}
 V_n^{(3)}(K) &= 1 - \frac{1}{n+1} \left( \frac{1}{2} F_{n+1}^{(3)}(K) + 2 \right) \\
 &= 1 - \frac{2}{n+1} - \frac{(n-1)n}{12} \iint_{KKK} [\tilde{V}^{n-2} + (1 - \tilde{V})^{n-2}] dP_1 dP_2 dP_3.
 \end{aligned}$$

Aus dieser Darstellung ergibt sich

$$\begin{aligned}
 V_5^{(3)}(K) &= \frac{2}{3} - \frac{5}{3} \iiint_{KKK} [\tilde{V}^3 + (1 - \tilde{V})^3] dP_1 dP_2 dP_3 \\
 &= \frac{2}{3} - \frac{5}{2} \iiint_{KKK} \left[ \tilde{V}^2 + (1 - \tilde{V})^2 - \frac{1}{3} \right] dP_1 dP_2 dP_3 \\
 &= \frac{5}{2} \left( \frac{3}{5} - \iiint_{KKK} [\tilde{V}^2 + (1 - \tilde{V})^2] dP_1 dP_2 dP_3 \right) \\
 &= \frac{5}{2} V_4^{(3)}(K).
 \end{aligned}$$

C. Buchta, Institut für Analysis, Technische Mathematik und  
Versicherungsmathematik, Technische Universität Wien

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 C. Buchta: Zufallspolygone in konvexen Vielecken. *J. reine angew. Math.*, im Druck.
- 2 C. Buchta: Das Volumen von Zufallspolyedern im Ellipsoid. Eingereicht.
- 3 H. Groemer: On some mean values associated with a randomly selected simplex in a convex set. *Pacific J. Math.* 45, 525–533 (1973).
- 4 H. Groemer: On the mean value of the volume of a random polytope in a convex set. *Arch. Math.* 25, 86–90 (1974).
- 5 P.M. Gruber: Approximation of convex bodies. In: P.M. Gruber, J.M. Wills, ed.: *Convexity and its applications*. Birkhäuser, Basel 1983.
- 6 M.G. Kendall und P.A.P. Moran: *Geometrical probability*. Griffin, London 1963.
- 7 J.F.C. Kingman: Random secants of a convex body. *J. Appl. Prob.* 6, 660–672 (1969).
- 8 V. Klee: What is the expected volume of a simplex whose vertices are chosen at random from a given convex body? *Am. Math. Monthly* 76, 286–288 (1969).
- 9 W.J. Reed: Random points in a simplex. *Pacific J. Math.* 54, 183–198 (1974).