

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 38 (1983)  
**Heft:** 6

**Artikel:** Über eine Formel für primitive Kongruenzwurzeln  
**Autor:** Bergmann, Horst  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-37197>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Die Gleichungen der Steinerellipsen sind

$$\text{Umellipse: } 7x^2 - 3xy + 3y^2 = 25,$$

$$\text{Inellipse: } 28x^2 - 12xy + 12y^2 = 25$$

Man verifiziert leicht, dass die Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  auf der Umellipse und die Seitenmitten auf der Inellipse liegen. Die Dreiecksmatrix

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{6} & \frac{5}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

erfüllt die Gleichung  $S = UU'$ , und  $\vec{x} = U^{-1}\vec{y}$  transformiert das Dreieck auf

$$A^* \left( \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad B^* \left( \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad C^* \left( -\frac{\sqrt{6}}{3}, 0 \right).$$

Dieses Dreieck ist gleichseitig und hat die Seitenlänge  $\sqrt{2}$ .

Peter Nüesch, Département de Mathématiques, ETH-Lausanne

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 A.P. Dempster: Elements of continuous multivariate Analysis. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969.
- 2 J. Steiner: Gesammelte Werke. Herausgegeben von K. Weierstrass, 2. Auflage. Chelsea Publishing Co., New York, N.Y., 1971.

© 1983 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/83/060137-06\$1.50 + 0.20/0

## Über eine Formel für primitive Kongruenzwurzeln

Zu jeder ungeraden Primzahlpotenz  $p^a$  gibt es genau  $\phi(\phi(p^a))$  Primitivwurzeln mod  $p^a$ , wobei  $\phi(n)$  die Eulersche  $\phi$ -Funktion ist. Kennt man eine Primitivwurzel  $\omega$  für die ungerade Primzahl  $p$ , so lässt sich eine Primitivwurzel mod  $p^a$  sofort explizit angeben: Die Zahl

$$\omega^* = \omega^{p^{a-1}}(1+p)$$

ist dann Primitivwurzel mod  $p^a$ .

Zur Ermittlung von Primitivwurzeln mod  $p$  schreibt H. Hasse ([2], S. 68): «Ein systematisches Rechenverfahren zur Bestimmung einer primitiven Wurzel mod  $p$ , etwa der kleinsten, ist nicht bekannt. Man ist dazu auf Probierversahren angewiesen.» – Nach der Angabe eines Probierversahrens zur Gewinnung von

Primitivwurzeln mod  $p$  bemerkt D. Shanks ([4], S.79): "Gauss, and others, have devised more efficient techniques, but no general, *explicit, nontentative* method has been devised, and this, like a good criterion for primality, remains an important unsolved problem."

Für spezielle Primzahlen  $p$  von besonderer Gestalt lassen sich dagegen Primitivwurzeln mod  $p$  explizit angeben. Beispielsweise<sup>1)</sup> ist  $\pm 6$  Primitivwurzel mod  $p$  für alle Primzahlen der Form  $p = 8q + 1$  mit ungerader Primzahl  $q$ .

Analog zu der Frage nach einer Formel<sup>2)</sup> für die  $n$ -te Primzahl  $p_n$  stellt sich die Aufgabe, eine Formel für Primitivwurzeln mod  $p$  zu finden.

Es soll jetzt gezeigt werden:

**Satz.** Für jede ungerade Primzahl  $p$  stellt die ganze Zahl

$$\omega_p = \sum_{r=2}^{p-1} r P_r \prod_{s=1}^{r-1} (1 - P_s) \quad \text{mit} \quad P_t = \prod_{\mu=1}^{t-1} (t^\mu - 1) \tag{1}$$

stets eine Primitivwurzel mod  $p$  dar.

Beweis: Für ganze Zahlen  $a$  und ungerade Primzahlen  $p$  sei das Symbol  $(a)_p$  definiert durch:

$$(a)_p = \begin{cases} 1, & \text{wenn } p \nmid a \text{ und } a \text{ Primitivwurzel mod } p \\ 0, & \text{wenn } p \nmid a \text{ und } a \text{ nicht Primitivwurzel mod } p \\ -1, & \text{wenn } p \mid a \end{cases}$$

Unter Heranziehung des Wilsonschen Satzes

$$(p-1)! \equiv - \prod_{k=2}^{p-1} (k-1) \equiv -1 \pmod{p} \quad (p > 2)$$

lässt sich damit das Primitivwurzel-Kriterium

$$(a)_p \equiv \prod_{\mu=1}^{p-2} (a^\mu - 1) \pmod{p} \quad (p > 2) \tag{2}$$

herleiten.

Man betrachtet jetzt die zahlentheoretische Funktion

$$F(r) = \frac{1}{2} (r)_p \prod_{s=0}^{r-1} (1 - (s)_p) \quad (r \geq 1). \tag{3}$$

1) Vergleiche dazu [1].

2) Man vergleiche etwa [3], S. 12 und 165.

Bezeichnet man mit  $\tilde{\omega}_p$  die kleinste positive Primitivwurzel mod  $p$ , so gilt offensichtlich

$$F(r) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } 1 \leq r \leq \tilde{\omega}_p - 1 \\ 1, & \text{wenn } r = \tilde{\omega}_p \\ 0, & \text{wenn } \tilde{\omega}_p + 1 \leq r \leq p \end{cases}.$$

Daraus folgt aber

$$\tilde{\omega}_p = \sum_{r=2}^{p-1} r F(r). \quad (4)$$

Aus (2), (3) und (4) ergibt sich schliesslich die Behauptung des Satzes.

Zur *praktischen* Berechnung einer Primitivwurzel mod  $p$  ist die Formel (1) nicht geeignet. Vom *theoretischen* Standpunkt aus betrachtet, kann aber aufgrund von (1) die Frage nach der Existenz eines systematischen Rechenverfahrens zur Bestimmung einer Primitivwurzel mod  $p$  im positiven Sinne entschieden werden.

Horst Bergmann, Hamburg

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 A. Ecker: On primitive roots. El. Math. 37, 103–108 (1982).
- 2 H. Hasse: Vorlesungen über Zahlentheorie. Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1950.
- 3 K.-H. Indlekofer: Zahlentheorie. Birkhäuser, Basel, Stuttgart 1978.
- 4 D. Shanks: Solved and unsolved Problems in Number Theory, Vol. I. Washington 1962.

© 1983 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/83/060142-03\$1.50 + 0.20/0

## Integralungleichungen aus der Hilbertraum-Theorie

In [3], S. 62, wird folgende Aufgabe gestellt:

Die Funktion  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  sei stetig differenzierbar, und es gelte  $f(0) = f(1) = 0$ . Man zeige

$$\left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2 \leq \frac{1}{12} \int_0^1 [f'(x)]^2 dx.$$

Wann genau gilt Gleichheit?

Der Aufgabensteller verallgemeinert das Problem in [4], S. 380–381, Aufgabe P. 326: Es sei  $f$  eine reellwertige  $n$ -mal stetig differenzierbare Funktion auf  $[0, 1]$  mit  $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ). Man zeige

$$\left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2 \leq (n!)^2 (2n+1)^{-1} ((2n)!)^{-2} \int_0^1 [f^{(n)}(x)]^2 dx$$