Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 38 (1983)
Heft: 6

Artikel: Steinerellipsoide
Autor: Nüesch, Peter
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-37196

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK
Revue de mathématiques élémentaires - Rivista di matematica elementare
Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

El. Math. Band 38 Nr. 6 Seiten 137-168 Basel, den 10. November 1983

Steinerellipsoide

Hans-Ulrich Krause zum 65. Geburtstag

In eine gegebene Ellipse lässt sich eine Schaar grösster Dreiecke einbeschreiben [...]
Jacob Steiner (1845)

Einleitung

Eine Steinerellipse wird üblicherweise als eine einem Dreieck einbeschriebene Ellipse definiert, deren Mittelpunkt mit dem Schwerpunkt des Dreiecks zusammenfällt. Daraus folgt unmittelbar, dass sie die Seiten in den Mitten berührt.
Historisch hat Steiner ([2]; Band I, S. 200, Theorem 11; Band 2, S. 347, Theorem 6) das Problem als Extremalproblem formuliert: Eine Steinerellipse ist die Inellipse maximaler oder die Umellipse minimaler Fläche. Die Tatsache, dass die Mittelpunkte in den Dreiecksschwerpunkt fallen, ist eine Folge dieser historischen Definition.
Im folgenden wird direkt mit einem Simplex, also dem n-dimensionalen Analogon des Dreiecks gearbeitet. In Anlehnung an den von Steiner behandelten Fall werden die Umellipsoide minimalen respektive die Inellipsoide maximalen Volumens Steinerellipsoide genannt. Während der klassische zweidimensionale Fall mit den üblichen Methoden der Analysis, wie Lagrangemultiplikatoren, lösbar ist, versagt dieses Vorgehen für höhere Dimensionen. Folgender Ansatz wird verwendet: Mit Hilfe der Quadratwurzel der inversen Matrix der Konzentrationsmatrix ([1], S. 126) der $n+1$ Ecken des Simplexes wird es affin auf ein regelmässiges Polyeder transformiert, für welches die Steinerellipsoide konzentrische Kugeln sind. Extremal- und Symmetrieeigenschaften bleiben bei dieser Abbildung erhalten und gelten somit auch für das Simplex. Gleichzeitig liefert dieser Ansatz die Gleichung der Steinerellipsoide. Bei der Verallgemeinerung auf mehr als zwei Dimensionen treten Berührungsprobleme tieferdimensionaler Seitenflächen auf, z. B. die Berührung der Kanten eines Tetraeders. Die in diesem Zusammenhang nicht interessierenden Zwischenellipsoide sind jedoch mit dem Abbildungsansatz sofort erhältlich.

Notation

Der Kolonnenvektor $\vec{x}_i$ ist der Ortsvektor der Ecke $X_i, i=0,1,\ldots,n$, X ist die $n\times(n+1)$-Matrix mit den Kolonnen $\vec{x}_i$. Zur Vereinfachung der Notation wird der Ursprung des Systems im Schwerpunkt des Simplexes angenommen. Algebraisch heisst das, dass alle Zeilensummen der Matrix X Null sind, also

$$X\cdot\vec{1}=\vec{0},$$

wobei $\vec{1}$ der Vektor mit Komponenten Eins ist.

Die Matrix P

Es wird angenommen, dass das Simplex nicht degeneriert ist. Die Konzentrationsmatrix $S=XX'$ ist dann eine reguläre Matrix der Ordnung n, und die Matrix

$$P=X'(XX')^{-1}X=X'S^{-1}X$$

hat folgende Eigenschaften:
(i) P ist symmetrisch,
(ii) P ist idempotent der Ordnung $n+1$,
(iii) Rang $(P)=n$,
(iv) $P\vec{1}=\vec{0}$,
(v) $P=I-\dfrac{1}{n+1}E$, wobei I die Einheits-, E die Einermatrix ist, d. h.

$$p_{ii}=\frac{n}{n+1},\qquad p_{ij}=-\frac{1}{n+1}.$$

Eigenschaft (i) folgt unmittelbar aus der Definition. Durch Rechnung verifiziert man $P^2=P$, also (ii).
Zu (iii): Rang $(P)=$ Spur (P) ist eine Eigenschaft idempotenter Matrizen. Allgemein gilt Spur $(AB)=$ Spur (BA). Somit ist Rang $(P)=$ Spur $(P)=$ Spur $(XX'S^{-1})=$ Spur $I=n$.
(iv) gilt wegen $X\vec{1}=\vec{0}$, also wegen der speziellen Wahl des Ursprungs. Andererseits bedeutet (iv), dass $\vec{1}$ ein Eigenvektor der Matrix P zum Eigenwert 0 ist.
Zu (v): Die Eigenwerte λ_i idempotenter Matrizen sind entweder 0 oder 1. Dabei bestimmt die Differenz von Ordnung und Rang die Anzahl verschwindender Eigenwerte. Nach (ii) und (iii) hat P somit genau einen verschwindenden Eigenwert, z. B. λ_{n+1}. Wenn die den Eigenwerten λ_i entsprechenden normierten Eigenvektoren mit $\vec{c}_i$ bezeichnet werden, gilt nach (iv) $\vec{c}_{n+1}=\vec{1}/\sqrt{n+1}$.
Die Spektralauflösung der Matrix P,

$$P=\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i\vec{c}_i\vec{c}_i',\qquad I=\sum_{i=1}^{n+1}\vec{c}_i\vec{c}_i',$$

vereinfacht sich im vorliegenden Fall somit auf

$$P=\sum_{i=1}^{n}\vec{c}_i\vec{c}_i'=\sum_{i=1}^{n+1}\vec{c}_i\vec{c}_i'-\vec{c}_{n+1}\vec{c}_{n+1}'=I-\frac{1}{n+1}E.$$

Die Gleichung

Einerseits ist nach (v) $p_{ii}=n/(n+1)$, andererseits folgt aus der Definition der Matrix P, dass $p_{ii}=\vec{x}_i'S^{-1}\vec{x}_i$ ist. Somit ist

$$\vec{x}'S^{-1}\vec{x}=\frac{n}{n+1}$$

die Gleichung des Umellipsoides des Simplexes.

Die Minimaleigenschaft

Da S eine positiv definite Matrix ist, kann mit einer regulären Matrix U faktorisiert werden, $S=UU'$. [U ist nicht eindeutig. Hingegen sind Dreiecksmatrizen U bis aufs Vorzeichen eindeutig.] $\vec{x}=U\vec{y}$ transformiert das Ellipsoid in die Kugel $\vec{y}'\vec{y}=c$, und gleichzeitig wird das n-Simplex $\{X_0,X_1,\ldots,X_n\}$ in ein regelmässiges Polyeder transformiert, da unter Verwendung der obigen Beziehungen für p_{ii} und p_{ij} gilt

$$\begin{aligned}(\vec{y}_i-\vec{y}_j)'(\vec{y}_i-\vec{y}_j)&=(\vec{x}_i-\vec{x}_j)'(U')^{-1}U^{-1}(\vec{x}_i-\vec{x}_j)\\&=(\vec{x}_i-\vec{x}_j)'S^{-1}(\vec{x}_i-\vec{x}_j)\\&=\vec{x}_i'S^{-1}\vec{x}_i+\vec{x}_j'S^{-1}\vec{x}_j-2\vec{x}_i'S^{-1}\vec{x}_j\\&=2\{p_{ii}-p_{ij}\}=2\left\{\frac{n}{n+1}+\frac{1}{n+1}\right\}=2.\end{aligned}$$

Unabhängigkeit dieses Resultates von i und j beweist die Regelmässigkeit des transformierten Simplexes. Überraschenderweise ist das Resultat aber auch unabhängig von n.
Die Kugel $\vec{y}'\vec{y}=c$ mit dem Volumen v^* ist offensichtlich die minimale Umkugel des regelmässigen Polyeders. Es gilt explizit

$$v^*=\frac{(\pi c)^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)},$$

siehe z. B. Dempster ([1] S. 44, Formel (3.5.7)].
Jedes andere Umellipsoid hat aus Symmetriegründen notwendigerweise grösseres Volumen $v>v^*$. Der durch die Rücktransformation verursachte Faktor ist

$$\det U=\sqrt{\det U\det U'}=\sqrt{\det UU'}=\sqrt{\det S},$$

was für die rücktransformierte Umkugel, also das Steinerellipsoid, das Volumen $v^*\sqrt{\det S}$, für die Rücktransformation irgendeines Umellipsoides das Volumen $v\sqrt{\det S}$ ergibt. Aus $v > v^*$ folgt, dass das Steinerellipsoid $\vec{x}' S^{-1} \vec{x} = n/(n+1)$ das Umellipsoid minimalen Volumens ist.

Das einbeschriebene Ellipsoid

Mit M_0 wird der Schwerpunkt der n-Seitenfläche des Simplexes bezeichnet, die auf der Hyperebene durch $X_1, \ldots, X_n$ liegt. Wegen der Wahl des Ursprungs im Schwerpunkt des vollen Simplexes ist

$$\overrightarrow{OM_0} = \vec{m}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \vec{x}_i = \frac{-1}{n} \vec{x}_0,$$

und die Gleichung des Ellipsoides durch die Schwerpunkte M_i aller n-Seitenflächen ist

$$\vec{m}_0' S^{-1} \vec{m}_0 = \frac{1}{n^2} \vec{x}_0' S^{-1} \vec{x}_0 = \frac{1}{n^2} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} = \vec{m}_i' S^{-1} \vec{m}_i.$$

Dieses Ellipsoid ist perspektiv-ähnlich dem Umellipsoid. Damit es sich tatsächlich um ein Inellipsoid handelt, muss gezeigt werden, dass es die Hyperebene in M_i tangiert. Sei $Z \neq M_0$ ein beliebiger Punkt der Hyperebene durch $X_1, \ldots, X_n, \vec{z}$ sein Ortsvektor.

$$\vec{z} = \sum_{i=1}^{n} w_i \vec{x}_i \quad \text{mit} \quad w_i \geqslant 0, \qquad \sum w_i = 1$$

$$\vec{z}' S^{-1} \vec{z} = \left(\sum_i w_i \vec{x}_i\right)' S^{-1} \left(\sum_j w_j \vec{x}_j\right) = \sum_i \sum_j w_i w_j \vec{x}_i' S^{-1} \vec{x}_j = \sum\sum w_i w_j p_{ij}$$

$$= \sum_i w_i^2 p_{ii} + \sum\sum_{i \neq j} w_i w_j p_{ij} = \frac{n}{n+1} \sum w_i^2 + \left(-\frac{1}{n+1}\right) \sum\sum_{i \neq j} w_i w_j$$

$$\left(\sum w_i\right)^2 = 1 = \sum_i w_i^2 + \sum\sum_{i \neq j} w_i w_j$$

gibt

$$\vec{z}' S^{-1} \vec{z} = \sum w_i^2 - \frac{1}{n+1}.$$

Die Cauchy Ungleichung

$$\left(\sum a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum b_i^2\right)^{1/2} \geqslant \sum a_i b_i$$

für $a_i = w_i, b_i = 1$ lautet

$$\sum w_i^2 \geqslant \frac{1}{n}.$$

Für $Z = M_0$ sind alle $w_i = 1/n$ und die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ somit linear abhängig. Für $Z \neq M_0$ gilt die Ungleichung in der scharfen Form.
Somit ist

$$\vec{z}' S^{-1} \vec{z} = \sum w_i^2 - \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} = \vec{m}_0' S^{-1} \vec{m}_0 .$$

Das bedeutet, dass Z auf einem grösseren Ellipsoid als M_0 liegt. M_0 ist nicht nur Punkt des Ellipsoides

$$\vec{x}' S^{-1} \vec{x} = \frac{1}{n(n+1)},$$

sondern auch Berührungspunkt von Hyperebenen und Ellipsoid. Mit dem gleichen Argument wie beim Umellipsoid wird die Optimalität auch hier bewiesen, d.h. das einbeschriebene Steinerellipsoid hat maximales Volumen.

Die Zwischenellipsoide

k der $n+1$ Simplexecken bilden eine k-Seitenfläche, $k = 1, \ldots, n$. Die konzentrischen Ellipsoide, die diese Seitenflächen in deren Schwerpunkten berühren, haben die Gleichung $\vec{x}' S^{-1} \vec{x} = c_k$ mit

$$c_k = \frac{n-k+1}{k(n+1)}$$

(c_1 ist die Konstante der Gleichung des Umellipsoides, c_n die des Inellipsoides). Man verifiziert leicht, dass der Schwerpunkt der Seitenfläche auf diesem Ellipsoid liegt. Dass es sich tatsächlich um eine Berührung handelt, zeigt man, indem im vorhergehenden Abschnitt n durch k ersetzt wird.

Numerisches Beispiel

Die einzelnen Schritte werden am Beispiel des Dreiecks $A(1,3)$, $B(1,-2)$, $C(-2,-1)$ illustriert. $n=2$ und $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Man sieht, dass die beiden Zeilensummen verschwinden. $S = XX' = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 14 \end{pmatrix}$. Somit ist $S^{-1} = \frac{1}{75} \begin{pmatrix} 14 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$.

Die Gleichungen der Steinerellipsen sind
Umellipse: $7x^2-3xy+3y^2=25$,
Inellipse: $28x^2-12xy+12y^2=25$
Man verifiziert leicht, dass die Punkte A, B und C auf der Umellipse und die Seitenmitten auf der Inellipse liegen. Die Dreiecksmatrix

$$U=\begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{6} & \frac{5}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

erfüllt die Gleichung $S=UU'$, und $\vec{x}=U^{-1}\vec{y}$ transformiert das Dreieck auf

$$A^*\left(\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\qquad B^*\left(\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\qquad C^*\left(-\frac{\sqrt{6}}{3},0\right).$$

Dieses Dreieck ist gleichseitig und hat die Seitenlänge $\sqrt{2}$.

Peter Nüesch, Département de Mathématiques, ETH-Lausanne

LITERATURVERZEICHNIS

1 A.P. Dempster: Elements of continuous multivariate Analysis. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969.
2 J. Steiner: Gesammelte Werke. Herausgegeben von K. Weierstrass, 2. Auflage. Chelsea Publishing Co., New York, N.Y., 1971.

© 1983 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/83/060137-06$1.50+0.20/0

Über eine Formel für primitive Kongruenzwurzeln

Zu jeder ungeraden Primzahlpotenz p^a gibt es genau $\phi(\phi(p^a))$ Primitivwurzeln $\bmod p^a$, wobei $\phi(n)$ die Eulersche ϕ-Funktion ist. Kennt man eine Primitivwurzel ω für die ungerade Primzahl p, so lässt sich eine Primitivwurzel $\bmod p^a$ sofort explizit angeben: Die Zahl

$$\omega^*=\omega^{p^{a-1}}(1+p)$$

ist dann Primitivwurzel $\bmod p^a$.
Zur Ermittlung von Primitivwurzeln $\bmod p$ schreibt H. Hasse ([2], S. 68): «Ein systematisches Rechenverfahren zur Bestimmung einer primitiven Wurzel $\bmod p$, etwa der kleinsten, ist nicht bekannt. Man ist dazu auf Probierverfahren angewiesen.» – Nach der Angabe eines Probierverfahrens zur Gewinnung von