Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 38 (1983)
Heft: 5

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

REFERENCES

1 A. Grytczuk: An identity involving Ramanujan's sum. El. Math. *36*, 16–17 (1981).
2 G.H. Hardy: Note on Ramanujan's trigonometrical function $C_q(n)$, and certain series of arithmetical functions. Camb. Phil. Soc. Proc. *20*, 263–271 (1921).
3 G.H. Hardy (with E.M. Wright): An Introduction to the Theory of Numbers. Fifth edition. University Press, Oxford 1980.
4 K.R. Johnson: A reciprocity law for Ramanujan sums. Pacif. J. *98*, 99–105 (1982).

© 1983 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/83/030122-03$1.50+0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 880. Durch je drei von n Punkten des Raumes ($n \geq 3$) denke man sich eine Ebene gelegt. Man zeige, dass diese Ebenen den Raum in maximal

$$\frac{1}{1296}(n^9-9n^8-48n^7+1098n^6-6711n^5+20079n^4-29890n^3+17712n^2 -936n+1296)$$

Gebiete zerlegen. [Aufgabe 643, El. Math. 26, 46 (1971), beinhaltet das analoge Problem für die Ebene.]

K. Wirth und A.S. Dreiding, Zürich

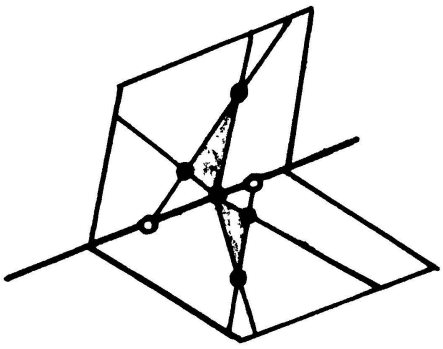
Lösung der Aufgabensteller:
Man denke sich die Lage der n Punkte so, dass die betrachteten Ebenen, ihre Schnittgeraden und Schnittpunkte in keiner vermeidbaren speziellen Weise inzidieren und keine Parallelitäten auftreten. Unter dieser Voraussetzung, die wir bei allen nachfolgenden kombinatorischen Überlegungen stillschweigend verwenden, wird der Raum in eine maximale Anzahl G von Gebieten zerlegt. Ist nun F die Gesamtzahl der Flächen, K und E diejenige der Kanten bzw. Ecken, die diese Gebiete beranden, so gilt:

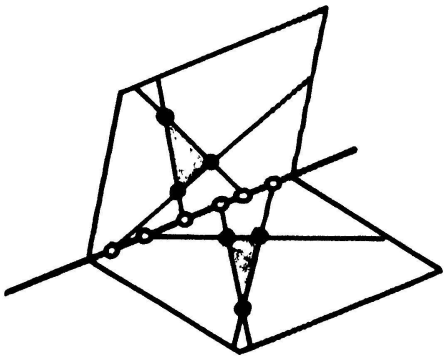
$$G=F-K+E+1 \tag{1}$$

Der Beweis dieser Formel erfolgt im wesentlichen durch vollständige Induktion nach der Gebietszahl G und stützt sich auf den Eulerschen Polyedersatz (die unbeschränkten Gebiete ersetzte man durch geeignete konvexe Polyeder).
Zur Vorbereitung führen wir Begriffe ein und nehmen einige Anzahlbestimmungen vorweg, ehe wir F, K und E der Reihe nach berechnen. Bezeichnet e die Anzahl der betrachteten Ebenen und g diejenige der Verbindungsgeraden von je 2 der n Punkte, so ist:

$$e=\binom{n}{3}, \qquad g=\binom{n}{2}. \tag{2}$$

Jede Verbindungsgerade ist die Schnittgerade von $n-2$ Ebenen. Genau zwei Ebenen gehen durch jede der übrigen Schnittgeraden, die wir Nebengeraden nennen. Es kommen zwei Arten von Nebengeraden vor: Nebengeraden 1. Art, die genau einen, und Nebengeraden 2. Art, die keinen der n vorgegebenen Punkte enthalten (siehe Figuren).





Ecken, die auf einer Verbindungsgeraden liegen, sollen Hauptecken, die übrigen Nebenecken heissen; trivialerweise ist jeder der n vorgegebenen Punkte eine Hauptecke. Eine Verbindungsgerade enthält offenbar stets $v+2$ Hauptecken mit $v=\binom{n-2}{3}$. Eine Nebengerade 1. Art hat stets 3 und eine solche 2. Art 6 Hauptecken (siehe Figuren). Für die Anzahlen a und b der Nebenecken auf einer Nebengeraden 1. bzw. 2. Art erhält man mit einfacher Kombinatorik:

$$a=\binom{n-1}{3}-2(n-3), \qquad b=\left[\binom{n}{3}-2\right]-6(n-3). \tag{3}$$

Ausserdem verifiziert man, dass in jeder Ebene 3 Verbindungsgeraden, $\bar{a}$ Nebengeraden 1. Art und $\bar{b}$ Nebengeraden 2. Art liegen:

$$\bar{a}=3\binom{n-3}{2}, \qquad \bar{b}=\binom{n-3}{3}. \tag{4}$$

Um nun F zu berechnen, bestimmen wir vorerst die Anzahl F' der Flächen in einer Ebene, denn es ist $F=eF'$. Dies geschieht mit Verwendung der planimetrischen Version von (1): $F'=K'-E'+1$. Es sind also die Anzahlen K' und E' der Kanten bzw. Ecken in dieser Ebene zu ermitteln. Weil jede Schnittgerade eine Kante mehr als Ecken aufweist, ergibt sich: $K'=3(v+3)+\bar{a}(a+4)+\bar{b}(b+7)$. Zur Bestimmung von E', zählen wir zuerst die Hauptecken: Insgesamt $3+3v$ liegen auf den 3 Verbindungsgeraden, die sich in der Ebene befinden, und die übrigen $\binom{n-3}{2}=\frac{1}{3}\bar{a}$ nur auf solchen, die sie durchstossen. Da sich in einer Nebenecke genau zwei Nebengeraden der Ebene schneiden, ist $\bar{a}a+\bar{b}b$ die doppelte Anzahl der Neben-

ecken. Daraus folgt: $E' = 3 + 3v + \frac{1}{3}\bar{a} + \frac{1}{2}(\bar{a}a + \bar{b}b)$. Nun lässt sich F angeben und man bekommt nach Umformen:

$$F = \frac{1}{2}e(\bar{a}a + \bar{b}b) + e\left(\frac{11}{3}\bar{a} + 7\bar{b} + 7\right).$$

Um die Gesamtzahl K der Kanten zu finden, erinnern wir uns daran, dass jede Schnittgerade eine Kante mehr als Ecken besitzt. Weil durch jede Nebengerade genau zwei Ebenen gehen, sind $\frac{1}{2}e\bar{a}$ und $\frac{1}{2}e\bar{b}$ die Anzahlen der Nebengeraden 1. bzw. 2. Art. Somit ist:

$$K = g(v+3) + \frac{1}{2}e\bar{a}(a+4) + \frac{1}{2}e\bar{b}(b+7).$$

Zur Bestimmung von E schliesslich sei bemerkt, dass auf allen Verbindungsgeraden insgesamt $n + gv$ Hauptecken liegen und durch jede Nebenecke genau drei Nebengeraden gehen. Hieraus ergibt sich:

$$E = n + gv + \frac{1}{6}e(\bar{a}a + \bar{b}b).$$

Mit Verwendung von (1) erhält man nun nach Umformen

$$G = n - 3g + 1 + e\left(\frac{1}{6}\bar{a}a + \frac{1}{6}\bar{b}b + \frac{5}{3}\bar{a} + \frac{7}{2}\bar{b} + 7\right)$$

und nach Einsetzen von (2), (3) und (4) mit mühsamer Rechnung das behauptete Resultat.

Aufgabe 885. In einer hyperbolischen Ebene bezeichne U_n die Grenzfigur einer Folge regulärer n-Ecke, deren Seiten unbeschränkt wachsen derart, dass aufeinanderfolgende Seiten schliesslich parallel werden. Die Berührungspunkte des dem Polygon U_n einbeschriebenen Kreises mit den Seiten von U_n bilden die Ecken eines regulären n-Ecks P_n. Man berechne die Winkel von P_n.

C. Bindschedler, Küsnacht

Lösung: Wir benutzen das Poincaré'sche Modell der hyperbolischen Ebene. Die Seiten von U_n und P_n sind in diesem Fall Bögen von Orthogonalkreisen des Einheitskreises. Sei P die Mitte einer Seite von U_n, Q der eine Endpunkt von ihr, M der Mittelpunkt des Einheitskreises und Z das Zentrum des Orthogonalkreises, zu welchem die durch P (und Q) verlaufende Seite von U_n gehört. Weil sich die aufeinanderfolgenden Seiten von U_n auf dem Einheitskreis treffen, muss das zu einer von P auslaufenden Seite (des einbeschriebenen Polygons P_n) gehörige Kreiszentrum O auf der Gerade MQ liegen. Die Orthogonalität der Seiten(verlängerungen) von U_n und P_n bezüglich des Einheitskreises äussert sich in der Eigenschaft, dass

die Strecke $\overline{ZO}$ normal zu $\overline{MZ}$ liegt und $\overline{ZQ}$ senkrecht auf $\overline{MQ}$ steht. (MOZ) ist also ein bei Z rechtwinkliges Dreieck mit der Höhe $\overline{ZQ}$ und dem Winkel (π/n) bei M; ferner ist P ein Punkt auf der Kathete $\overline{MZ}$, mit $\overline{PZ}=\overline{QZ}$.
Weil dieses funktionentheoretische Modell die hyperbolische Ebene konform wiedergibt, dürfen wir den Winkel φ_n als Schnittwinkel zweier Kreistangenten auffassen. Etwas direkter kann zwar der halbe Winkel (er werde mit α bezeichnet) berechnet werden: α ist der Winkel, den die Tangente im Endpunkt des Radius $\overline{OP}$ mit der Strecke $\overline{PM}$ bildet und stimmt mit dem Dreieckswinkel $\sphericalangle(POZ)$ überein, und deshalb gilt:

$$\tan\alpha=\overline{ZP}:\overline{OZ}.$$

Zusammen mit $\overline{ZP}=\overline{ZQ}$, $\overline{OZ}=\overline{ZQ}/(\cos(\pi/n))$ und $\alpha=\varphi_n/2$ erhalten wir den gesuchten Wert der Winkel von P_n:

$$\varphi_n=2\arctan\left(\cos(\pi/n)\right).$$

Hj. Stocker (Wädenswil ZH)

Hj. Stocker (Wädenswil) sandte eine zweite Lösung.

Aufgabe 886. Es sei

$$\begin{pmatrix} p & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Übergangsmatrix einer Markovkette. Die Zufallsvariable T sei definiert als die Anzahl der bis zur Absorption erforderlichen Schritte. Man bestimme $\mathrm{Var}(T)$.

U. Abel, L. Pilz, Heidelberg, BRD

Solution: The time T is at least n if and only if the Markov chain, which, supposedly, starts in the nonabsorbing state, stays there for at least n transitions, *i.e.*

$$P(T\geq n)=p^{n-1}, \qquad (n=1,2,\ldots),$$

or $P(T=n)=(1-p)p^{n-1}$ $(n=1,2,\ldots)$. It follows that $E(T)=\sum nP(T=n)=1/(1-p)$ and $E\big(T(T-1)\big)=\sum n(n-1)P(T=n)=2p/(1-p)^2$ and hence $\mathrm{Var}(T)=E(T^2)-(ET)^2=p/(1-p)^2$.

O.P. Lossers, Eindhoven, NL

Weitere Lösungen sandten U. Heierle (Gersau), A.A. Jagers (Enschede, NL), Hj. Stocker (Wädenswil), M. Vowe (Therwil).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. April 1984* an *Dr. H. Kappus.* Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68), Problem 887 A (Band 37, S. 151).

Aufgabe 900. Es seien h_a, h_b, h_c die Höhen, r der Inkreisradius eines ebenen Dreiecks. Man schätze

$$\frac{h_a-r}{h_a+r}+\frac{h_b-r}{h_b+r}+\frac{h_c-r}{h_c+r}$$

bestmöglich nach unten ab.

M. D. Milosevic, Pranjani, YU

Aufgabe 901. Die Funktion $f:\{z\in\mathbf{C}\mid |z|<1\}\to\{z\in\mathbf{C}\mid |z|\leq 1\}$ sei holomorph und es sei $f(0)=0$. Dann trifft genau eine der beiden folgenden Aussagen zu:

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\,dx\right|<2/3. \tag{1}$$

Es gibt eine Konstante $a\in\mathbf{C}$ mit $|a|=1$ derart, dass

$$f(z)=a\,z^2. \tag{2}$$

Dies ist zu zeigen.

P. von Siebenthal, Zürich