Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 38 (1983)
Heft: 5

Artikel: A result for the 'other' variable of Ramanujan's sum

Autor: [s.n.]

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-37195

10 T. Tarnai and Zs. Gáspár: Improved Packing of Equal Circles on a Sphere and Rigidity of Its Graph. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., to appear.
11 T. Tarnai and Zs. Gáspár: Rigidity of the Graphs of the Spherical Circle Packings. Z. angew. Math. Mech., *63*, T333–T334 (1983).

 0013-6018/83/030119-04$1.50+0.20/0

A Result for the 'other' variable of Ramanujan's sum

In [1], Grytczuk shows that

$$\sum_{d \mid k} | C_d(n) | = (k,n)\, 2^{\omega(k/(k,n))}, \tag{1}$$

where $C_d(n)$ is Ramanujan's sum and $\omega(n)$ is the number of distinct prime divisors of n. In this note we derive an analogous result for the sum

$$\sum_{d \mid n} | C_k(d) | . \tag{2}$$

It is well-known (e.g. [3], p. 56) that $C_k(n)$ is multiplicative in the variable k for each fixed n. That is, if $(k,j)=1$, then $C_k(n)\,C_j(n)=C_{kj}(n)$. Grytczuk uses this multiplicative property of Ramanujan's sum to derive the identity (1). This is a standard technique for proving such identities. Ramanujan's sum is not multiplicative in its other variable and thus the same technique cannot be applied directly to evaluating the analogous sum (2). However, in [4] the following reciprocity law for Ramanujan's sum is proved. Let $\bar{k}$ be the core of k (the largest square-free divisor of k) and $k^* = k/\bar{k}$, then for all n and k,

$$\frac{\mu(\bar{k})}{k^*}\, C_k(n k^*) = \frac{\mu(\bar{n})}{n^*}\, C_n(k n^*). \tag{3}$$

It is also shown in [4] that

$$C_k(n k^*) = k^*\, C_{\bar{k}}(n). \tag{4}$$

These two results make the sum (2) tractable.
It is routine to prove the following Lemma.

Lemma 1. *Let $F_k(n)=\sum_{d \mid n} | C_{\bar{d}}(k) |$, then $F_k(n)$ is multiplicative in the variable n for each fixed k.*

Lemma 2. *Fix k. Then*

$$F_k(n) = \prod_{\substack{p^a \| n \\ p \nmid k}} (a+1) \prod_{\substack{p^a \| n \\ p \mid k}} [a(p-1)+1],$$

where $p^a \| n$ denotes that $p^a \mid n$ but $p^{a+1} \nmid n$. (This gives Grytczuk's result if n is square-free.)

Proof: Recall that

$$C_p(k)=\begin{cases} p-1 & \text{if } p \mid k \\ -1 & \text{if } p \nmid k \end{cases}$$

[2]. By Lemma 1 we may assume that $n=p^a$. Then,

$$\begin{aligned} F_k(n) &= \sum_{d \mid p^a} |C_{\bar{d}}(k)| \\ &= |C_1(k)| + a|C_p(k)|\,. \end{aligned}$$

So that

$$F_k(n)=\begin{cases} a+1 & \text{if } p \nmid k \\ a(p-1)+1 & \text{if } p \mid k\,. \end{cases}$$

The result now follows.

Theorem 1

$$\sum_{d \mid n} |C_k(d)| = \begin{cases} 0 & \text{if } k^* \nmid n \\ k^* \prod\limits_{\substack{p^a \| n/k^* \\ p \nmid k}} (a+1) \prod\limits_{\substack{p^a \| \frac{n}{k^*} \\ p \mid k}} [a(p-1)+1] & \text{if } k^* \mid n \end{cases}$$

Proof: If $k^* \nmid d$ then $C_k(d)=0$ [2], thus the sum is zero if $k^* \nmid n$. Additionally, we may write (if $k^* \mid n$)

$$\begin{aligned} \sum_{d \mid n} |C_k(d)| &= \sum_{d \mid \frac{n}{k^*}} |C_k(dk^*)| \\ &= k^* \sum_{d \mid \frac{n}{k^*}} \left| \frac{C_d(k\,d^*)}{d^*} \right|, \qquad \text{(by 3)} \\ &= k^* \sum_{d \mid \frac{n}{k^*}} |C_{\bar{d}}(k)|\,, \qquad \text{(by 4)} \\ &= k^* \prod_{\substack{p^a \| n/k^* \\ p \nmid k}} (a+1) \prod_{\substack{p^a \| \frac{n}{k^*} \\ p \mid k}} [a(p-1)+1]\,. \end{aligned}$$

Kenneth R. Johnson
North Dakota State University, Fargo, ND.

REFERENCES

1 A. Grytczuk: An identity involving Ramanujan's sum. El. Math. *36*, 16-17 (1981).
2 G.H. Hardy: Note on Ramanujan's trigonometrical function $C_q(n)$, and certain series of arithmetical functions. Camb. Phil. Soc. Proc. *20*, 263-271 (1921).
3 G.H. Hardy (with E.M. Wright): An Introduction to the Theory of Numbers. Fifth edition. University Press, Oxford 1980.
4 K.R. Johnson: A reciprocity law for Ramanujan sums. Pacif. J. *98*, 99-105 (1982).

 0013-6018/83/030122-03$1.50+0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 880. Durch je drei von n Punkten des Raumes ($n \geq 3$) denke man sich eine Ebene gelegt. Man zeige, dass diese Ebenen den Raum in maximal

$$\frac{1}{1296}(n^9-9n^8-48n^7+1098n^6-6711n^5+20079n^4-29890n^3+17712n^2 -936n+1296)$$

Gebiete zerlegen. [Aufgabe 643, El. Math. 26, 46 (1971), beinhaltet das analoge Problem für die Ebene.]

K. Wirth und A.S. Dreiding, Zürich

Lösung der Aufgabensteller:

Man denke sich die Lage der n Punkte so, dass die betrachteten Ebenen, ihre Schnittgeraden und Schnittpunkte in keiner vermeidbaren speziellen Weise inzidieren und keine Parallelitäten auftreten. Unter dieser Voraussetzung, die wir bei allen nachfolgenden kombinatorischen Überlegungen stillschweigend verwenden, wird der Raum in eine maximale Anzahl G von Gebieten zerlegt. Ist nun F die Gesamtzahl der Flächen, K und E diejenige der Kanten bzw. Ecken, die diese Gebiete beranden, so gilt:

$$G=F-K+E+1 \tag{1}$$

Der Beweis dieser Formel erfolgt im wesentlichen durch vollständige Induktion nach der Gebietszahl G und stützt sich auf den Eulerschen Polyedersatz (die unbeschränkten Gebiete ersetzte man durch geeignete konvexe Polyeder).

Zur Vorbereitung führen wir Begriffe ein und nehmen einige Anzahlbestimmungen vorweg, ehe wir F, K und E der Reihe nach berechnen. Bezeichnet e die Anzahl der betrachteten Ebenen und g diejenige der Verbindungsgeraden von je 2 der n Punkte, so ist:

$$e=\binom{n}{3}, \quad g=\binom{n}{2}. \tag{2}$$