

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 38 (1983)  
**Heft:** 5

**Artikel:** Über eine die konvexe Kurven kennzeichnende Minimaleigenschaft  
**Autor:** Pfluger, Albert  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-37193>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 12.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

El. Math.

Band 38

Nr. 5

Seiten 113–136

Basel, den 10. September 1983

## Über eine die konvexen Kurven kennzeichnende Minimaleigenschaft

1. Wir betrachten eine geschlossene Kurve mit einer Parametrisierung durch eine komplexwertige Funktion  $f(\delta)$  auf dem Intervall  $[0, 2\pi]$  (es ist also  $f(0) = f(2\pi)$ ), von der wir zunächst voraussetzen, dass sie eine stetige und nicht verschwindende Ableitung besitzt. Zu ihr gehört eine Fourierreihe  $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\delta}$  mit den komplexen Fourierkoeffizienten

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\delta) e^{-in\delta} d\delta. \quad (1)$$

Es ist  $L = \int_0^{2\pi} |f'(\delta)| d\delta$  ihre Länge. Zwischen dem «ersten» Fourierkoeffizienten  $c_1$  und dieser Länge gilt die Ungleichung

$$2\pi |c_1| \leq L, \quad (2)$$

wie man durch partielle Integration in (1) sofort feststellt:

$$\begin{aligned} 2\pi |c_1| &= \left| \int_0^{2\pi} f(\delta) e^{-i\delta} d\delta \right| = \left| \int_0^{2\pi} -i e^{-i\delta} f'(\delta) d\delta \right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} |f'(\delta)| d\delta = L. \end{aligned} \quad (3)$$

Es stellt sich natürlich die Frage, für welche Kurven oder Funktionen  $f$  in (2) Gleichheit besteht. Im vorliegenden Fall, wo  $f(\delta)$  eine überall stetige und nicht verschwindende Ableitung besitzt, ist diese sofort zu beantworten. Denn diese Gleichheit tritt dann und nur dann ein, wenn in (3) zwischen dem 3. und 4. Glied Gleichheit besteht. Dafür ist aber notwendig und hinreichend, dass  $-i e^{-i\delta} f'(\delta) = |f'(\delta)|$  ist, m.a.W., dass der Tangentenvektor  $f'(\delta)$  in der Form

$$f'(\delta) = i e^{i\delta} \cdot \rho(\delta)$$

geschrieben werden kann, wo  $\rho$  eine positive und  $2\pi$ -periodische Funktion ist. Diese Bedingung drückt zweierlei aus:

1. Man erhält im Kurvenpunkt  $f(\delta)$  die Tangentenrichtung  $\tau$ , indem man den Vektor  $e^{i\delta}$  um  $\pi/2$  dreht:  $\tau = \delta + \pi/2$ . Da diese mit wachsendem  $\delta$  zunimmt, *muß die Kurve konvex sein*.

2. Bezeichnet  $s$  die Bogenlänge, so gilt  $ds/d\delta = |f'(\delta)| = \rho$ , d.h.  $\rho$  ist der *Krümmungsradius*.

Die Gleichheit in (2) hat also eine zweifache Wirkung, nämlich auf die *Gestalt der Kurve* und den *Kurvenparameter*  $\delta$ , der die Grösse von  $|c_1|$  wesentlich beeinflusst. Sie ist gleichzeitig notwendig und hinreichend.

Die Frage nach der Gleichheit in (2) kann leicht in ein Extremalproblem verwandelt werden: Man betrachte die Klasse der Funktionen  $f$  aus  $C'_{2\pi}$ , die für  $|c_1|$  einen bestimmten Wert liefern, z. B. den Wert 1, und suche darin jene Funktionen, welche Kurven mit kleinster Länge parametrisieren. Diese Minimaleigenschaft charakterisiert die konvexen glatten Kurven (wobei die Normalenrichtung als Kurvenparameter zu wählen ist).

2. Die Frage, ob diese Minimaleigenschaft allen konvexen Kurven zukommt und nur diesen, ist wohl nicht ganz trivial. Denn die oben an  $f$  gesetzten Regularitätsbedingungen schliessen das Auftreten von Ecken und Seiten aus, da bei Ecken die Funktion und bei Seiten die Normalenrichtung auf einem Intervall konstant bleibt. Betrachten wir als Beispiel etwa die Funktion  $f(\delta)$ , die für  $0 < \delta \leq \pi$  den Wert  $i$  und für  $\pi < \delta \leq 2\pi$  den Wert  $-i$  annimmt. Es ist  $2\pi c_1 = 4$ . Hier besteht der Graph von  $f$  aus 2 Punkten, aber es ist natürlich, ihn durch Hinzufügen der Sprünge von  $f$  zu einer geschlossenen Kurve zu ergänzen, die aus den Strecken von  $-i$  nach  $i$  und von  $i$  nach  $-i$  besteht, also ein Schlitz ist, und die Länge 4 hat. So entsteht in (2) Gleichheit. Allgemeiner, sind  $z_1, z_2, \dots, z_n$  die Ecken eines beliebigen *konvexen* Polygons, bezeichnet  $\alpha_j$  die Normalenrichtung (nach aussen!) der Seite von  $z_{j-1}$  nach  $z_j$  ( $z_0 = z_n$ ),  $j = 1, 2, \dots, n$ , und ist  $f$  die Funktion, welche für  $\alpha_{j-1} < \delta \leq \alpha_j$  den Wert  $z_j$  annimmt, so ergibt sich analog

$$2\pi c_1 = \sum_{j=1}^n |z_j - z_{j-1}|.$$

Dies ist der Umfang  $L$  der konvexen Hülle von  $\{z_1, \dots, z_n\}$ , und in (2) entsteht wieder Gleichheit.

Für die Herleitung von (2) war die partielle Integration in (3) wesentlich. Diese Operation, wie sie in (3) ausgeführt wird, ist nur für ein absolut stetiges  $f$  gültig und führt im vorangehenden Beispiel, wo  $f$  stückweise konstant ist, offenbar zu nichts. In (3) sollte eben die Ableitung  $f'$  nicht im klassischen, sondern im distributionellen Sinn genommen werden, welche unter anderem auch die Sprünge von  $f$  mit berücksichtigt. Dies ist jedoch in unserem Kontext äquivalent damit, dass man in (3) das Integral im 3. Glied durch das Stieltjessche Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{i} e^{-i\delta} df(\delta)$$

ersetzt und dann durch partielle Integration zum Integral im 2. Glied gelangt, da wir naturgemäss anzunehmen haben, dass die Kurve rektifizierbar oder die Funktion  $f$  von beschränkter Schwankung sei.

Es bezeichne also  $V_{2\pi}$  die Klasse der komplexwertigen und  $2\pi$ -periodischen Funktionen auf  $\mathbf{R}$ , die lokal von beschränkter Schwankung und wie folgt normiert sind:

$$f(0)=0 \quad \text{und} \quad f(x)=f(x_+):=\lim_{y\downarrow x} f(y), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Dann ist jede Unstetigkeitsstelle  $x$  von  $f \in V_{2\pi}$  eine Sprungstelle, d.h. es existieren die Grenzwerte von links und von rechts und sind verschieden:

$$\lim_{y\uparrow x} f(y)=f(x_-) \neq f(x_+)=\lim_{y\downarrow x} f(y),$$

und es gibt höchstens abzählbar viele Sprungstellen, die aber auf  $\mathbf{R}$  dicht sein können. Die totale Variation von  $f$  im Intervall  $[0, x]$ ,  $x \geq 0$ , ist eine wachsende Funktion  $F(x)$  mit der Normierung

$$F(0)=0 \quad \text{und} \quad F(x)=F(x_+), \quad x \geq 0. \tag{4}$$

Es hat dann  $f$  auf  $[0, 2\pi]$  die totale Variation  $F(2\pi)$  und auf  $[x, y]$ ,  $0 \leq x < y$ , die totale Variation  $F(y) - F(x)$ . Wie erwähnt, folgt durch partielle Integration

$$2\pi |c_1| = \left| \int_0^{2\pi} -i e^{-i\delta} df(\delta) \right| \leq \int_0^{2\pi} dF(\delta) = F(2\pi). \tag{5}$$

Ist die Funktion  $f$  stetig, so ist ihr Graph eine geschlossene Kurve und  $F(2\pi)$  ihre Länge. Im allgemeinen, d.h. für  $f \in V_{2\pi}$ , hat dieser Graph an den Sprungstellen «Lücken». Werden diese nun ausgefüllt, d.h. die Punkte  $f(x_-)$  und  $f(x_+)$  durch Strecken verbunden, so erhält man wiederum eine geschlossene Kurve, die aber anders zu parametrisieren ist. Wir nennen sie den *geschlossenen Graphen* von  $f$  und bezeichnen ihre Länge mit  $L$ . Es ist offenbar  $L = F(2\pi)$ , und es bleibt nach (5) die Ungleichung (2) mit den gegebenen Präzisierungen auch in unserem allgemeinen Rahmen bestehen. Es ist nun unser Problem, jene  $f \in V_{2\pi}$  zu bestimmen, für die in (2) Gleichheit besteht. Da man  $f$  durch  $e^{i\alpha} f$  ersetzen kann, ohne die Gleichung  $2\pi |c_1| = L$  zu zerstören, kann man sich auf den Fall beschränken, wo  $c_1 \geq 0$ , also

$$\int_0^{2\pi} -i e^{-i\delta} df(\delta) = \int_0^{2\pi} |df(\delta)| = F(2\pi) \tag{6}$$

ist. Funktionen aus  $V_{2\pi}$ , die dieser Gleichung genügen ( $F(2\pi)$  ist hier einfach ein Synonym für  $\int_0^{2\pi} |df|$ ), nennen wir kurz *extremal*. Wir werden nachfolgend eine explizite Formel für diese extremalen Funktionen  $f$  geben und dann nach der geometrischen Bedeutung dieser Formel fragen.

3. Wir nehmen also an, dass  $f$  extremal und daher die Gleichung (6) erfüllt sei. Wegen  $|\int_a^{2\pi} e^{-ix} df| \leq F(2\pi) - F(a)$  und  $|\int_0^a e^{-ix} df| \leq F(a)$  folgt daraus

$$\int_0^a -i e^{-ix} df = F(a), \quad a \in [0, 2\pi] \quad (7)$$

und diese Bedingung ist notwendig und hinreichend.

Für ein stetig differenzierbares  $f$  ist nun

$$\int_0^a -i e^{-ix} df = \int_0^a -i e^{-ix} f'(x) dx \quad \text{und} \quad F(a) = \int_0^a F'(x) dx,$$

und aus (7) folgt durch Ableiten nach  $a$ , dass  $f'(a) = i e^{ia} F'(a)$  und daher

$$f(a) = \int_0^a i e^{ix} dF(x), \quad 0 \leq a \leq 2\pi, \quad (8)$$

sein muss. Es ist nun leicht zu sehen, dass sich jedes extremale  $f$  so darstellen lässt, wobei  $F(a)$  die totale Variation von  $f$  auf  $[0, a]$  ist. (Schreibt man  $df = i e^{ix} |df|$  ohne zu fragen, was die Zeichen  $df$  und  $|df|$  bedeuten, so scheint der Schluss von (7) auf (8) sogar trivial zu sein.) Es gilt aber mehr: Für jede wachsende Funktion  $F$ , die der Normierung (4) und der *Periodizitätsbedingung*

$$\int_0^{2\pi} e^{-iy} dF(y) = 0 \quad (9)$$

genügt, definiert (8) ein extremales  $f$  und ist  $F(a)$  die totale Variation von  $f$  auf  $[0, a]$ . In der Tat, integriert man die linke Seite von (6) partiell, setzt (8) ein und vertauscht die Reihenfolge der Integration, so erhält man (6). Es ist aber noch zu verifizieren, dass  $F$  die totale Variation von  $f$  ist. Für ein beliebiges Teilintervall  $[\beta, \beta']$  von  $[0, 2\pi]$  ist  $|f(\beta') - f(\beta)| \leq \int_{\beta}^{\beta'} dF$  und dieses, angewandt auf beliebige Unterteilungen der Intervalle  $[0, a]$  und  $[a, 2\pi]$ , ergibt

$$\int_0^a |df| \leq F(a) \quad \text{und} \quad \int_a^{2\pi} |df| \leq F(2\pi) - F(a).$$

Daraus schliessen wir in Verbindung mit (6) wie zu Beginn dieser Nummer, dass (7) gelten muss. Deshalb ist auch  $F(a) \leq \int_0^a |df|$  und schliesslich  $F(a) = \int_0^a |df|$  für  $a \in [0, 2\pi]$ .

Für jedes wachsende  $F$ , das der Normierung (4) genügt, stellt somit (8) eine Funktion dar, die wegen (9) zu  $V_{2\pi}$  gehört, der Bedingung (6) genügt und daher extremal ist. Ob nun jede Extremale in  $V_{2\pi}$  in dieser Weise dargestellt wird? Nehmen wir an, es sei  $f$  extremal und es sei  $F$  die totale Variation von  $f$ . Dann gilt (7). Die mit  $F$  durch (8) definierte Funktion bezeichnen wir mit  $f_1$ . Nach dem soeben Bewiesenen gilt dann

$$\int_0^x \frac{1}{i} e^{-iy} df_1 = F(x)$$

und zusammen mit (7) folgt dann, dass  $\varphi = f - f_1$  im ganzen Intervall  $[0, 2\pi]$  der Gleichung

$$0 = \int_0^x \frac{1}{i} e^{-iy} d\varphi = \frac{1}{i} e^{-ix} \varphi(x) - \int_0^x -e^{-iy} \varphi(y) dy$$

oder

$$\varphi(x) = \int_0^x i e^{i(x-y)} \varphi(y) dy$$

genügen muss. Daher ist  $\varphi$  stetig differenzierbar und  $\varphi' \equiv 0$ , somit  $\varphi$  eine Konstante, die wegen  $\varphi(0) = f(0) - f_1(0) = 0$  verschwinden muss. Also ist  $f_1$  mit  $f$  identisch und daher jede Extremale durch die Formel (8) darstellbar, und wir haben folgendes

**Lemma.** Die extremalen Funktionen in  $V_{2\pi}$  sind genau jene, die durch die Formel (8) dargestellt werden, wobei  $F$  eine beliebige wachsende Funktion ist, die der Periodizitätsbedingung (9) und der Normierungsbedingung (4) genügt.

4. Welches ist nun die geometrische Bedeutung der Extremalbedingung (6)? Es sei  $F$  gegeben und  $f$  durch (8) definiert. Für jedes  $a \in [0, 2\pi]$  und  $a - \pi \leq \delta \leq a + \pi$  ist dann

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \{ e^{-ia} (f(\delta) - f(a)) \} &= \operatorname{Re} \left\{ \int_a^\delta i e^{i(y-a)} dF(y) \right\} \\ &= - \int_a^\delta \sin(y-a) dF(y) \leq 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Die Gleichung

$$\operatorname{Re} \{ e^{-ia} z \} = \operatorname{Re} \{ e^{-ia} f(a) \}$$

definiert eine Gerade mit der *Normalenrichtung*  $a$ , die durch den Punkt  $f(a)$  geht und mit  $h_a$  bezeichnet werden soll. (10) besagt, dass der Graph  $\Gamma_f$  von  $f$  ganz auf der linken Seite dieser Geraden liegt; sie ist für  $\Gamma_f$  die *Stützgerade* mit der *Normalenrichtung*  $a$ . Es geht durch jeden Punkt von  $\Gamma_f$  mindestens eine Stützgerade, und der Durchschnitt der Halbebenen  $\{z: \operatorname{Re} \{ e^{-ia} (z - f(a)) \} \leq 0\}$  ist offenbar der kleinste konvexe Bereich, der  $\Gamma_f$  enthält. Er sei mit  $K$  bezeichnet.  $\Gamma_f$  liegt auf dem Rand von  $K$ , und der Durchschnitt von  $K$  mit einer Stützgeraden  $h_a$  ist entweder ein einziger Punkt oder eine Strecke. Letzteres tritt genau dann ein, wenn  $a$  für  $f$  eine Unstetigkeitsstelle, also  $f(a_-) \neq f(a_+)$  ist. Indem man an diesen Unstetigkeitsstellen die Punkte  $f(a_-)$  und  $f(a_+)$  miteinander geradlinig verbindet, werden die Lücken des Graphen  $\Gamma_f$  geschlossen, und es entsteht eine Kurve (mit anders zu wählender Parametrisierung), die wir den geschlossenen Graphen von  $f$  nennen und mit  $\bar{\Gamma}_f$  bezeichnen wollen.  $f$  legt auf jeder Stützgeraden einen ganz bestimmten

Punkt fest. Es ist jener Endpunkt einer möglichen Strecke  $K \cap h_a$ , der bei kanonischem Durchlaufen der Kurve  $\bar{\Gamma}_f$  zuletzt angetroffen wird. Da  $\bar{\Gamma}_f$  der Rand von  $K$  ist, wurde gezeigt, dass für jede Extremale  $f$  der geschlossene Graph  $\bar{\Gamma}_f$  der Rand eines kompakten konvexen Bereiches  $K$  ist. Offenbar ist seine Länge gegeben durch die totale Variation von  $f$  in Intervall  $[0, 2\pi]$ , und  $F(a)$  ist die Länge des Kurvenbogens von  $f(0)$  bis  $f(a)$ .

Es sei nun umgekehrt  $K$  ein kompakter konvexer Bereich. Seine Stützfunktion ist definiert durch

$$h(a) = \max_{z \in K} \operatorname{Re} \{ e^{-ia} z \},$$

und die Stützgerade mit Normalenrichtung  $a$  ist gegeben durch die Gleichung

$$\operatorname{Re} \{ e^{-ia} z \} = x \cos a + y \sin a = h(a).$$

Für alle  $a$  hat  $h$  Rechts- und Linksableitungen  $h'_+$  bzw.  $h'_-$ , und es ist stets  $h'_+(a_-) = h'_-(a) \leq h'_+(a) = h'_-(a_+)$  (vgl. [1]). Im folgenden bezeichnet  $h'$  immer die Rechtsableitung. Wir definieren  $f(a)$  als den Schnittpunkt zweier infinitesimal benachbarter Stützgeraden  $h_a$  und  $h_{a+\varepsilon}$ ,  $\varepsilon > 0$ ; also

$$\begin{aligned} h'(a) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h(a+\varepsilon) - h(a)}{\varepsilon} = \operatorname{Re} \left\{ e^{-ia} f(a) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{-i\varepsilon} - 1}{\varepsilon} \right\} \\ &= \operatorname{Re} \{ -i e^{-ia} f(a) \} \end{aligned}$$

und schliesslich

$$f(a) = e^{ia} (h(a) + i h'(a)). \quad (11)$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass die Funktion

$$F(a) = \int_0^a h(x) dx + h'(a) - h'(0) \quad (12)$$

wachsend ist (vgl. [2]) und der Normierungsbedingung (4) genügt. Dass sie auch die Periodizitätsbedingung (9) erfüllt, kann durch eine einfache Rechnung bestätigt werden. Die in (11) definierte Funktion  $f$  ist also von beschränkter Variation und erfüllt auch alle anderen Bedingungen für die Zugehörigkeit zur Klasse  $V_{2\pi}$ , ausser, dass  $f(0) = 0$  sei. Durch Hinzufügen einer Konstanten, was nur eine Translation von  $K$  bedeutet, kann aber immer erreicht werden, dass  $f(0) = 0$  wird. Es bezeichne  $f_1$  das so modifizierte  $f: f_1 = f - (h(0) + i h'(0))$ . Eine kleine Rechnung zeigt, dass sie durch (8) reproduziert wird, wenn für  $F$  die Funktion (12) eingesetzt wird. Auf Grund des Lemmas ist  $f_1$  extremal und der zu  $f_1$  gehörige geschlossene Graph bis auf die oben vorgenommene Translation der Rand des gegebenen konvexen Bereichs  $K$ . Damit ist der folgende Satz bewiesen:

**Satz.** *Ist die  $2\pi$ -periodische Funktion  $f$  lokal von beschränkter Schwankung und ist ihr «erster» Fourierkoeffizient normiert, d. h.*

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\delta) e^{-i\delta} d\delta = 1,$$

*so ist die Länge ihres geschlossenen Graphen  $\bar{\Gamma}_f$  (d. i. die totale Variation von  $f$  auf  $[0, 2\pi]$ ) dann und nur dann am kleinsten, wenn  $\bar{\Gamma}_f$  eine geschlossene konvexe Kurve und der Parameter  $\delta$  die Normalenrichtung ihrer Stützgeraden ist.*

Albert Pfluger, Zürich

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 G. Polya: Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen. Math. Z. 29, 549–640 (1929).
- 2 R. Heine: Zur Theorie der konvexen Körper. Die Monotonie von  $\int^\varphi h(x) dx + h'(\varphi)$ . Math. Ann. 115 130–131 (1938).

© 1983 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/83/030113-07\$1.50 + 0.20/0

## Packing of 180 equal circles on a sphere

The Dutch botanist Tammes raised the following problem: To determine the largest angular diameter of  $n$  equal circles (spherical caps) which can be packed on the surface of a sphere without overlapping; or what is the same, to arrange  $n$  points on the unit sphere so as to maximize the minimum distance between any two of the points. The Tammes problem has a vast literature which is surveyed, e.g., in Fejes Tóth's book [4], and more recent results are incorporated in a review paper by Melnyk, Knop and Smith [6] where the solutions and conjectured solutions of this problem are summarized for  $n=2$  to 60 and 80, 110, 119, 120, 122. Some of the spherical circle-packings listed in [6] have been improved by Danzer [2] ( $n=17, 32$ ) and, more recently, by Tarnai and Gáspár [10, 11] ( $n=18, 27, 34, 35, 40, 80, 122$ ); and new packings for  $n=54, 72, 132$  have also been constructed [9].

Studying these packings we have found that among them, in general, those packings have great density which have octahedral or icosahedral symmetry in rotation. (The density of packing is defined as the ratio of the total area of the surface of the spherical caps and the surface area of the sphere.) This fact has suggested us to search for packings, for certain values of  $n$ , in octahedral or icosahedral arrangement having no planes of symmetry. As a result of the research a packing of 180 equal circles on a sphere has been constructed that we present in this note.

According to Coxeter's paper [1], let us consider the regular tessellation of symbol  $\{3, 5+\}_{3,2}$ , which consists of equilateral triangles, five or six at each vertex, some slightly folded, such that they cover and fill the polyhedral surface of the regular