Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 38 (1983)
Heft: 4

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Umkreis des Dreiecks liegt. Die Miquelschen Punkte der parallelen Geraden b_l und b_2 liegen dann auf dem Umkreis des Basisdreiecks einander gegenüber. Ihre Simsongeraden schneiden sich daher rechtwinklig auf dem Feuerbachkreis (siehe Abschnitt 2).

E. A. Bockemüller und W. Kleinschmidt,
DFVLR, Institut für Flugmechanik, Braunschweig

LITERATURVERZEICHNIS

1 Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Bd. III, 1.2, Artikel III AB10. G. Berkhan und W. Fr. Meyer: Neuere Dreiecksgeometrie. B. G. Teubner, Leipzig 1921.
2 J. Naas und H. L. Schmid: Mathematisches Wörterbuch. Akademie-Verlag Berlin, B. G. Teubner, Stuttgart 1979.
3 H. Dörrie: Triumph der Mathematik. F. Hirt, Breslau 1940.
4 H. S. M. Coxeter und S. L. Greitzer: Geometry revisited. Random House, New York 1967.
5 H. S. M. Coxeter: Unvergängliche Geometrie. Birkhäuser, Basel 1980 (zuerst erschienen als: Introduction to Geometry, Wiley, New York 1961, 1969).
6 E. Donath: Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1976.

 0013-6018/83/040096-06$1.50 + 0.20/0

Kleine Mitteilungen

On a number-theoretical problem of Erdös

P. Erdös asked ([1], problem A 15) for the least prime number p for which there exist a, k_1, k_2 and k_3 such that

$$\prod_{i=1}^{k_1}(a+i) \equiv \prod_{i=1}^{k_2}(a+k_1+i) \equiv \prod_{i=1}^{k_3}(a+k_1+k_2+i) \equiv 1 \pmod{p}, \tag{1}$$

i.e.

$$\begin{aligned}(a+k_1)!/a! &\equiv (a+k_1+k_2)!/(a+k_1)! \\ &\equiv (a+k_1+k_2+k_3)!/(a+k_1+k_2)! \equiv 1 \pmod{p}.\end{aligned} \tag{2}$$

Evidently (1) is equivalent to

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k_1}\operatorname{ind}(a+i) \equiv \sum_{i=1}^{k_2}\operatorname{ind}(a+k_1+i) \equiv \sum_{i=1}^{k_3}\operatorname{ind}(a+k_1+k_2+i)& \\ \equiv 0 \pmod{p-1}.&\end{aligned} \tag{3}$$

With a table of indices I found that (in the form (2))

$$5! \equiv 11!/5! \equiv 15!/11! \equiv 1 \pmod{17}$$

and even

$$4! \equiv 8!/4! \equiv 11!/8! \equiv 21!/11! \equiv 1 \pmod{23}.$$

For the last chain see comments on F 11 in [1]. It seems that longer chains can be obtained in the same way.

Andrzej Makowski, Institute of Mathematics, University of Warsaw

REFERENCE

1 Richard K. Guy: Unsolved problems in number theory. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1981.

Bemerkung zum Beitrag von R. Mortini, El. Math., Vol. 38 (1983), S. 49–51

Es handelt sich um die Summation der Potenzreihe $\sum_1^\infty n^p x^n$, wo $p = 1, 2, 3, \ldots$ und $|x| < 1$ ist. Direkter als in dem genannten Beitrag könnte man folgendermassen vorgehen, und dies dürfte doch wohl bekannt sein.
Aus der geometrischen Reihe

$$\sum_0^\infty x^n = \frac{1}{1-x}$$

erhält man durch differenzieren nach x und multiplizieren mit x die Gleichung

$$\sum_1^\infty n\, x^n = \frac{x}{(1-x)^2}\,.$$

Bezeichnen wir diese Operation, d.i. differenzieren nach x und multiplizieren mit x, kurz mit Δ, so führt ihre p-fache Wiederholung zu

$$\sum_1^\infty n^p x^n = \Delta^p\left(\frac{1}{1-x}\right). \tag{1}$$

Wegen

$$\Delta\left(\frac{1}{(1-x)^j}\right) = \frac{j x}{(1-x)^{j+1}} = \frac{j}{(1-x)^{j+1}} - \frac{j}{(1-x)^j}$$

$j = 1, 2, \ldots$ folgt durch Induktion

$$\Delta^p\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{a_1}{1-x} + \frac{a_2}{(1-x)^2} + \cdots + \frac{a_{p+1}}{(1-x)^{p+1}}\,.$$

Schreibt man dies in der Form

$$\Delta^p\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{H_p(x)}{(1-x)^{p+1}}, \qquad H_p(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_px^p,$$

so folgt mit (1) die Gleichung

$$(1-x)^{p+1}\sum_1^\infty n^p x^n = H_p(x).$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt $c_0=0$ und für die übrigen c_n die von Mortini gegebene «geschlossene» Form

$$c_n=\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{p+1}{j}(n-j)^p, \qquad n=1,2,\ldots,p.$$

Und aus

$$\frac{H_{p+1}(x)}{(1-x)^{p+2}}=\Delta\left(\Delta^p\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)=x\frac{d}{dx}\left(\frac{H_p(x)}{(1-x)^{p+1}}\right)$$
$$=\frac{x(x-1)H_p'(x)+x(p+1)H_p(x)}{(1-x)^{p+2}}$$

kann man sofort die Rekursionsformel für H_p ablesen.

Albert Pfluger, Zürich

0013-6018/83/040101-02$1.50+0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 882. Für $n=2$ und $n=3$ ermittle man Lösungen $(x_1,\ldots,x_n;\ y_1,\ldots,y_n)\in\mathbf{C}^{2n}$ der Gleichung

$$\sum_{i=1}^n(x_i/y_i)=\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)\Big/\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)$$

in Gestalt zyklischer Parameterdarstellungen, d.h.:

$$x_{\sigma(i)}=f(u_{\sigma(1)},\ldots,u_{\sigma(n)}), \qquad y_{\sigma(i)}=g(u_{\sigma(1)},\ldots,u_{\sigma(n)}); \qquad i=1,\ldots,n$$

für beliebige zyklische Permutationen σ der Indizes $1,\ldots,n$.

I. Paasche, München, BRD