Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 38 (1983)
Heft: 4

Artikel: On the successive remainders of the exponential series
Autor: Brezinski, Claude
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-37189

orientierten Grundriss $\vec{s}_2'$ von $\vec{s}_2$ in den orientierten Grundriss $\vec{s}'$ des Sehstrahls $\vec{s}$ bringt, positiv, daher geht in der Einschneidesituation der orientierte Aufriss $\vec{s}''$ aus $\vec{s}'$ durch eine positive Drehung hervor; da weiters laut Angabe $\sphericalangle \vec{s}_2', \vec{s}' < 90°$ und $\sphericalangle \vec{s}_1'', \vec{s}'' < 90°$ gilt, ist das Mass $\sphericalangle \vec{s}', \vec{s}''$ des Drehwinkels grösser als 90°. Mit dem orientierten Aufriss $\vec{s}''$ von $\vec{s}$ ist, bis auf Schiebungen parallel s'', die Lage des Einschneideaufrisses auf dem Zeichenblatt bestimmt.

W. Kickinger, TU Wien

LITERATURVERZEICHNIS

1 H. Brauner und W. Kickinger: Baugeometrie I. Bauverlag, Wiesbaden, Berlin 1977.
2 H. Brauner: Darstellende Geometrie im Schulunterricht. Der Mathematikunterricht *27*, Heft 3, 5-68 (1981).
3 L. Eckhart: Ein neues Schrägrissverfahren. Österreichs höhere Schule, Päd.-fachwiss. Beiblatt zum «Mittelschullehrer», 6. Jg., Oktober 1937.
4 L. Eckhart: Affine Abbildung und Axonometrie. S.-Ber. Akad. Wiss. Wien *146*, 51-56 (1937).
5 W. Kickinger: Konstruktion von Normalrissen durch Einschneiden. Der Mathematikunterricht *28*, Heft 2 (1982).
6 E.J. Nyström: Zur praktischen Axonometrie. Soc. scient. Fenn., Commentationes Physico-Mathem. XI 11, 1-25 (1942).
7 F. Reutter: Darstellende Geometrie, Bd. I. Verlag G. Braun, Karlsruhe 1961.
8 E. Stiefel: Lehrbuch der Darstellenden Geometrie. Verlag Birkhäuser, Basel 1947.
9 K. Strubecker: Vorlesungen über Darstellende Geometrie, 2. Aufl. Verlag Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen 1967.

 0013-6018/83/040081-06$1.50 + 0.20/0

On the successive remainders of the exponential series

In [3], Gautschi proved some results on the successive remainders of the exponential series and he made two conjectures.
The aim of this note is to complete Gautschi's results and to prove his second conjecture.
Let us recall that a sequence (a_n) is called totally monotone if, $\forall\, n, k \geq 0$

$$(-1)^k \Delta^k a_n \geq 0$$

where Δ is the forward difference operator: $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$.
A characterization of totally monotone sequences is due to Markov who showed that a necessary and sufficient condition for (a_n) to be totally monotone is that

$$a_n = \int_0^1 t^n \, dg(t) \qquad n = 0, 1, \ldots$$

where g is bounded and non decreasing in [0, 1]. We shall write $(a_n) \in TM$.

We have

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\phi_n(x)$$

where $\phi_n(x) = e^{x\theta_n(x)}$, $0 < \theta_n(x) < 1$.
Gautschi proved some results on the sequences (ϕ_n) and (θ_n) which are collected in the following theorem.

Theorem 1. $\forall x > 0$, $(\phi_n - 1) \in TM$. $\forall x < 0$, $(1 - \phi_n) \in TM$. $\forall x \neq 0$ *then* $\forall n$, $(-1)^k \Delta^k \theta_n > 0$ *for* $k = 0, 1$ *and* 2 *and* $\lim_{n \to \infty} \theta_n = 0$.

The problem which now arises is to know whether or not (θ_n) is totally monotone. Gautschi gives a numerical example showing that for $x > 0$, (θ_n) is not totally monotone and he makes the conjecture that (θ_n) is totally monotone for $x < 0$. We shall prove this conjecture for $x < 0$ and complete Gautschi's results for $x > 0$.
The core of the proof is a theorem due to Brezinski [1, 2].

Theorem 2. *Let* $c(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i$ *be a power series with a radius of convergence* R *and such that* $\forall i$, $c_i \geq 0$. *Let* $(x_n) \in TM$ *with* $x_0 < R$. *Then* $(c(x_n)) \in TM$.

We now can prove

Theorem 3. $\forall x < 0$, $(\theta_n) \in TM$.

Proof: We have

$$-\operatorname{Log}(1-t) = t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots$$

This series converges for $-1 \leq t \leq 1$.
For $x < 0$, $0 < \phi_n < 1$. Thus $0 < 1 - \phi_0 < 1$ and, by theorem 2, $(-\operatorname{Log}(1-(1-\phi_n)))$ $\in TM$. That is $(-\operatorname{Log}\phi_n = -x\theta_n) \in TM$ and the result follows since $x < 0$. ∎
Let us now look at the case $x > 0$.

Theorem 4. $\forall x > 0$, $\exists N(x) : \forall n \geq N(x)$

$$\theta_n = \int_0^1 t^{n - N(x)} d\theta(t)$$

where θ *is a normalized function of bounded variation in* $[0, 1]$.

Proof: For $x > 0$, $(\phi_n - 1) \in TM$. Thus $\forall n$, $\phi_n > 1$. Since $\lim_{n \to \infty} \theta_n = 0$ we have $\lim_{n \to \infty} \phi_n = 1$. Thus $\forall x > 0$, $\exists N \equiv N(x)$ such that $\forall n \geq N$, $\phi_n < 2$.

We have

$$\operatorname{Log}\left(\frac{1+t}{1-t}\right)=2\left(t+\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+\cdots\right)$$

which converges for $|t|<1$.
Since $0<\phi_n-1<1$ for $n\geq N$ it follows from theorem 2 that $(a_n)_{n\geq N}\in TM$ where

$$a_n=\operatorname{Log}\frac{1+(\phi_n-1)}{1-(\phi_n-1)}=\operatorname{Log}\frac{\phi_n}{2-\phi_n}\,.$$

But

$$a_n=\operatorname{Log}\phi_n-\operatorname{Log}(2-\phi_n)$$

or

$$\operatorname{Log}\phi_n=x\,\theta_n=a_n-b_n$$

with

$$b_n=-\operatorname{Log}\left(1-(\phi_n-1)\right).$$

From theorem 2, $(b_n)_{n\geq N}\in TM$ which shows that $(\theta_n)_{n\geq N}$ is the difference of two totally monotone sequences. The result stated in the theorem follows from a known result originally due to Jordan (see, for example, [4], theorem 2b, p. 103, and theorem 4b, p. 109). ∎

Let us now characterize the index $N(x)$ of the previous theorem.
We have

$$\phi_n(x)=1+\frac{x}{n+2}+\frac{x^2}{(n+2)(n+3)}+\cdots$$

$$\phi_n<1+\frac{x}{n+2}+\left(\frac{x}{n+2}\right)^2+\cdots=\frac{1}{1-x/(n+2)}\quad\text{if}\quad\frac{x}{n+2}<1\,.$$

Let N be the smallest index such that $x/(N+2)<1$ and $\forall\, n\geq N$

$$\phi_n\leq\phi_N<\frac{1}{1-x/(N+2)}\leq 2\,.$$

We find $N\geq 2(x-1)$. Thus $N(x)$ is the smallest integer greater or equal to $2(x-1)$.
As shown by the numerical examples this value of N can be over-estimated by one.
Numerical examples suggest that the sequence $(\theta_n)_{n\geq N}$ is totally monotone.

Claude Brezinski, Université de Lille I, Villeneuve-d'Ascq, France

REFERENCES

1 C. Brezinski: Génération de suites totalement monotones et oscillantes. C.R. Acad. Sci. Paris *280*A, 729-731 (1975).
2 C. Brezinski: Padé-type approximation and general orthogonal polynomials. ISNM, Vol. 50, Birkhäuser-Verlag, Basel 1980.
3 W. Gautschi: A note on the successive remainders of the exponential series. El. Math. *37*, 46-49 (1982).
4 D.V. Widder: The Laplace transform. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1946.

 0013-6018/83/040086-04$1.50 + 0.20/0

Rechnen in endlichen Körpern
(Beispiele elementarer Zahlentheorie)

Einleitung

Wir gehen von einem Restklassenkörper $\mathbf{K}$ ungerader Ordnung aus. Dann gilt also $|\mathbf{K}| = p$ mit p Primzahl und $p \neq 2$.
Bekanntlich lässt sich jede Primzahl $p \neq 2$ entweder in der Form $p = 4a + 1$ oder aber in der Form $p = 4a - 1$ mit $a \in \mathbf{N}$ darstellen. Im ersten Fall ist -1 Quadrat in $\mathbf{K}$, im zweiten dagegen nicht. Mit $\mathbf{K}^* = \mathbf{K} \setminus \{0\}$ schreiben wir $-1 \in \mathbf{K}^{*2}$ bzw. $-1 \notin \mathbf{K}^2$ [1], [3].

Das Problem

Wie viele Lösungen (x^2, y^2) *mit* $x, y \in \mathbf{K}^*$ *besitzt die Gleichung*

$$x^2 - y^2 = 1. \tag{1}$$

Die Lösung des Problems

Die Gleichung (1) besitzt genau $a - 1$ *Lösungen der genannten Art.*

Mit den bei der Behandlung diophantischer Gleichungen in $\mathbf{N}$ üblichen Verfahren [2] schreiben wir $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 1$ und setzen $x - y = v$ und $x + y = w$. Es gilt $v, w \in \mathbf{K}^*$. Weiter erhalten wir

$$w = \frac{1}{v}, \qquad x = \frac{1+v^2}{2v}, \qquad y = \frac{1-v^2}{2v}.$$

a) Sei v ein beliebiges Element aus $\mathbf{K}^*$. Dann folgt mit $x = (1+v^2)/(2v)$ und $y = (1-v^2)/(2v)$ durch Einsetzen und Ausrechnen sofort $x^2 - y^2 = 1$.
b) Seien nun umgekehrt $x, y \in \mathbf{K}^*$ mit $x^2 - y^2 = 1$ gegeben. Dann existiert mindestens ein $v \in \mathbf{K}^*$ so, dass $x = (1+v^2)/(2v)$, $y = (1-v^2)/(2v)$.