

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 38 (1983)  
**Heft:** 4

**Artikel:** Normalrisse im Einschneideverfahren  
**Autor:** Kickinger, W.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-37188>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 09.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

El. Math.

Band 38

Nr. 4

Seiten 81–112

Basel, den 10. Juli 1983

## Normalrisse im Einschneideverfahren

Herrn emer. O. Univ. Prof. Dr. J. Krames zum 85. Geburtstag gewidmet

Technische Objekte sind meist in gepaarten Normalrissen<sup>1)</sup> gegeben, die möglichst viele Objektmessungen unverzerrt zeigen, aber oft sehr unanschaulich sind.

Zur raschen Herstellung anschaulicher Parallelrisse aus gepaarten Normalrissen eignet sich besonders das Einschneideverfahren: Dabei werden etwa Grund- und Aufriss<sup>2)</sup> in die Zeichenebene gelegt, zwei nichtparallele Geraden  $\sigma_1^p$  und  $\sigma_2^p$  der Zeichenebene gewählt und durch die Grundrisse bzw. Aufrisse der Objektpunkte zu  $\sigma_1^p$  bzw.  $\sigma_2^p$  parallele Einschneidegeraden gezogen. Schneidet man zusammengehörende Einschneidegeraden, so entsteht nach Eckhart [3, 4], abgesehen vom Maßstab, ein Parallelriss des in Grund- und Aufriss gegebenen Objekts<sup>3)</sup>; dabei ist  $\sigma_1^p$  der Parallelriss einer erstprojizierenden Ebene  $\sigma_1$  und  $\sigma_2^p$  der Parallelriss einer zweitprojizierenden Ebene  $\sigma_2$ , also  $\sigma_1^p = \sigma_1'$  und  $\sigma_2^p = \sigma_2''$ .

Im folgenden soll die Frage beantwortet werden, wie ein Grundriss und ein Aufriss aufs Zeichenblatt gelegt<sup>4)</sup> und welche Einschneidegeraden gewählt werden müssen, damit das Einschneideergebnis ein Normalriss zu einer vorgegebenen Blickrichtung ist. Damit erübrigt sich die graphisch oft unbefriedigende Einführung von zwei Seitenrissen.

1. Soll das Einschneideergebnis ein Normalriss sein, den wir fortan mit dem Abbildungszeiger " kennzeichnen, so ist der scheinbare Umriss  $u''$  einer Kugelfläche ein Kreis; dieser berührt jene Einschneidegeraden, welche Tangenten an den ersten bzw. zweiten scheinbaren Umriss  $u_1'$  bzw.  $u_2''$  der Kugelfläche sind<sup>5)</sup> (Fig. 1). Da ein einem Kreis berührend umschriebenes Parallelogramm ein Rhombus ist, sind

1) Unter gepaarten Normalrissen versteht man zwei Normalrisse in zueinander normalen Bildebenen.

2) Alle Überlegungen, die wir anhand von Grund- und Aufriss anstellen, gelten analog für zwei beliebige gepaarte Normalrisse.

3) Diese Aussage stimmt nicht, wenn die Schnittpunkte aller zusammengehörender Einschneidegeraden kollinear sind. Dies trifft genau dann zu, wenn die Ebenen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  parallel sind. Diese Ausartung wird im folgenden ausgeschlossen.

4) Bildebenen legen wir immer so in die Zeichenebene, dass die mitgenommenen Blickpfeile der Sehstrahlen vom Zeichner zur Zeichenebene weisen (vgl. [1] und [2]).

5) E. Stiefel gibt in [8], S. 138f., ein Verfahren an, mit dem unter Benützung eines axonometrischen Umrisspunktes auf  $u_1$  ein Einschneideaufriß zu gegebenen Einschneidegeraden und gegebenem Einschneidegrundriss so ergänzt werden kann, dass ein normalaxonometrischer Riss entsteht. Wegen (2) funktioniert dieses Verfahren nicht uneingeschränkt (vgl. dazu auch [7], S. 209f.).

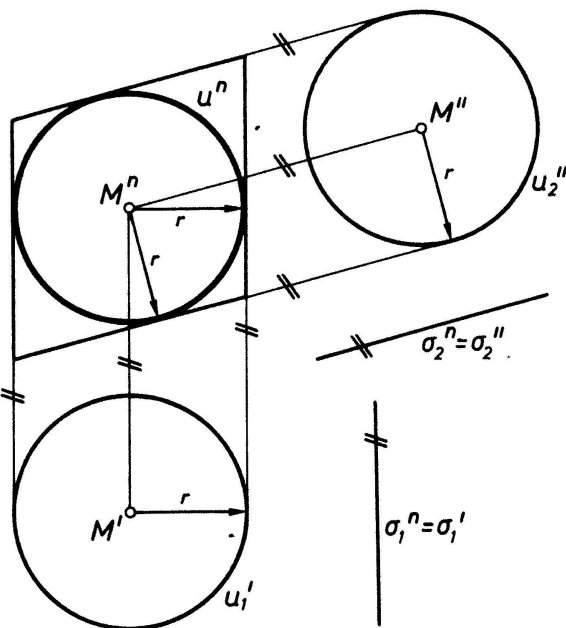
die Kreise  $u_1'$ ,  $u_2''$  und  $u''$  gleich gross. Ein Normalriss kann daher nur aus gepaarten Normalrissen gleichen Maßstabs eingeschnitten werden, und der Maßstab des eingeschnittenen Normalrisses stimmt stets mit dem Maßstab der beiden Einschneiderisse überein.

Durch eine im eingeschnittenen Normalriss projizierende Gerade  $s$  gehen genau eine erstprojizierende Ebene  $\sigma_1$  und eine zweitprojizierende Ebene  $\sigma_2$ . Setzen wir  $s$  in keinem Einschneideriss als projizierend voraus, so gilt stets  $\sigma_1' = s'$  und  $\sigma_2'' = s''$ , und wegen  $\sigma_1'' = \sigma_1'$  bzw.  $\sigma_2' = \sigma_2''$  verlaufen die Einschneidegeraden parallel  $s'$  bzw.  $s''$ .

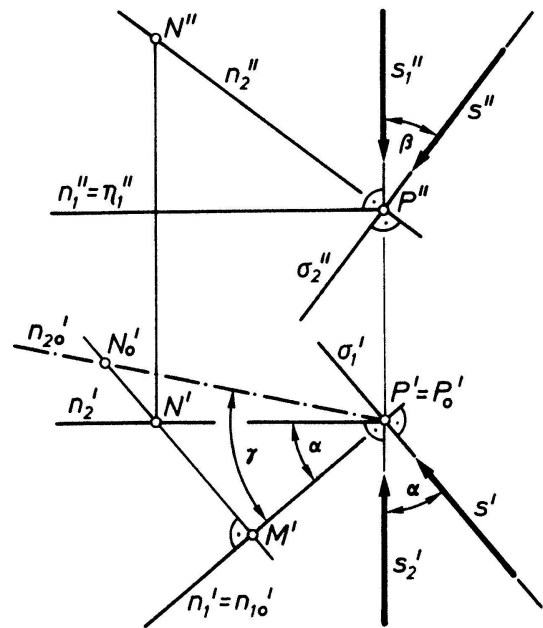
Ab nun sollen die im Einschneideergebnis projizierenden Geraden weder erst- noch zweitprojizierend sein<sup>6)</sup>.

2. Durch Vorgabe eines vertikalen, nach unten orientierten Sehstrahls<sup>7)</sup>  $\bar{s}_1$  bzw. eines horizontalen Sehstrahls  $\bar{s}_2$  ist der Grundriss bzw. der Aufriss eines Objekts bestimmt. Ein von  $\bar{s}_1$  und  $\bar{s}_2$  verschiedener Sehstrahl  $\bar{s}$  legt einen weiteren Normalriss fest; wir wählen die Sehstrahlen  $\bar{s}_1$ ,  $\bar{s}_2$  und  $\bar{s}$  durch denselben Punkt  $P$ .

Das Winkelmaß  $\gamma$  der Ebenen  $\sigma_1 = s_1 s$  und  $\sigma_2 = s_2 s$  ist gleich dem Mass des Winkels der Normalen<sup>9)</sup>  $n_1 \perp \sigma_1$  und  $n_2 \perp \sigma_2$  durch den Punkt  $P$ . Zur Ermittlung der wahren Grösse von  $\gamma = \sphericalangle n_1, n_2$  wurde in Figur 2 die Ebene  $n_1 n_2$  um  $n_1$  in die erste Haupt-



Figur 1



Figur 2

6) In den ausgeschlossenen Fällen ist das Resultat, abgesehen von Sichtbarkeitsfragen, ein Grundriss oder ein Aufriss.

7) Ist die Orientierung einer Geraden  $p$  wesentlich, so setzen wir  $\bar{p}$ .

8) Das Winkelmaß  $\sphericalangle p, q$  zweier schneidender (nicht orientierter) Geraden  $p, q$  ist das Winkelmaß eines von den Geraden bestimmten, nicht stumpfen Winkels [2], S.9.

9) Die im wesentlichen auf E. Nyström zurückgehende Formel (1) wird in [6] mit Hilfe der sphärischen Trigonometrie hergeleitet und unter Benützung eines Nomogramms ausgewertet. In [9] findet K. Strubecker die Formel (1) als Bedingung, dass im Einschneideergebnis der scheinbare Parallelumriss einer Kugel speziell ein Kreis ist.

ebene  $\eta_1$  durch  $P$  gedreht; der Drehkreisbogen eines Punktes  $N$  von  $n_2$  gehört dabei einer zu  $n_1$  normalen Ebene an und hat seinen Mittelpunkt  $M$  auf  $n_1$ . Im Grundriss können wir dann die wahre Länge  $l$  der Strecke  $(P, N)$  mit  $l = \overline{PN} = \overline{P_o'N_o'}$  ablesen. Da die (nicht orientierten) Geraden  $s_1''$ ,  $s''$  dasselbe Winkelmaß  $\beta$  besitzen wie der Winkel von  $n_2$  gegen die Grundrissebene, gilt  $\overline{P'N'} = l \cos \beta$ . Die (nicht orientierten) Geraden  $s_2'$ ,  $s'$  und  $n_1'$ ,  $n_2'$  bilden zwei Normalenwinkel; diese haben das gleiche Winkelmaß  $\alpha$ , so dass aus dem rechtwinkligen Dreieck  $(P', M', N')$  folgt:  $\overline{P'M'} = l \cos \alpha \cos \beta$ . Durch das rechtwinklige Dreieck  $(P', M', N_o')$  ist  $\overline{P'M'} = l \cos \gamma$  bedingt, was zusammenfassend

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta \quad (1)$$

ergibt<sup>10)</sup>.

Da das Winkelmaß der Risse zweier projizierender Ebenen genau bei Normalprojektion gleich dem Winkelmaß der Ebenen ist, gilt  $\gamma = \sphericalangle \sigma_1^n, \sigma_2^n$ ; in der Einschneidesituation ist dann  $\sigma_1^n = s'$  und  $\sigma_2^n = s''$ , also  $\gamma = \sphericalangle s', s''$ . Damit lautet (1)

$$\cos (s', s'') = \cos (s_2', s') \cos (s_1'', s''). \quad (2)$$

Anhand der Formel (2) kann aus dem Grundriss und dem Aufriss eines Sehstrahls  $\vec{s}$  das Winkelmaß der (nicht orientierten) Einschneidegeraden für den Normalriss zum Sehstrahl  $\vec{s}$  ermittelt werden; doch ist damit – auch wenn wir von Parallelverschiebungen absehen – die gegenseitige Lage der Einschneiderisse auf dem Zeichenblatt nicht hinreichend bestimmt, da die Orientierungen der Sehstrahlen noch nicht berücksichtigt sind.

3. Für die folgenden Überlegungen wählen wir den gemeinsamen Punkt  $P$  der Sehstrahlen  $\vec{s}_1$ ,  $\vec{s}_2$  und  $\vec{s}$  in der Grundrissebene  $\pi_1$ , so dass der Sehstrahl  $\vec{s}_2$  mit seinem Grundriss  $\vec{s}_2'$  zusammenfällt; für die Ergebnisse ist die Lage von  $P$  bezüglich  $\pi_1$  bedeutungslos. Der zu konstruierende Normalriss zeigt eine Übersicht bzw. Untersicht, wenn die zum Punkt  $P$  hinorientierten Halbgeraden von  $\vec{s}_1$  und  $\vec{s}$  demselben Halbraum bzw. verschiedenen Halbräumen bezüglich  $\pi_1$  angehören.

In der erstprojizierenden Ebene  $\sigma_1 = s_1 s$  kann der Sehstrahl  $\vec{s}_1$  durch  $P$  die zum Punkt  $P$  hinorientierten Halbgeraden von  $\vec{s}$  und  $\vec{s}'$  nicht trennen, und so sind – wie der in Figur 3 a bzw. Figur 3 b mit dem Abbildungszeiger  $m$  versehene Seitenriss zur Blickrichtung  $b \perp s_1 s$  erkennen lässt – im Normalriss zur Blickrichtung  $s$  bei Übersicht bzw. Untersicht der Orientierungspfeil von  $\vec{s}_1^n$  und der von  $\vec{s}^n$  stets entgegengesetzt bzw. gleich gerichtet. Da weiters in der Einschneidesituation die zum Punkt  $P'$  hinorientierte Halbgerade von  $s_2'$  und die zum Punkt  $P^n$  hinorientierte Halbgerade von  $\vec{s}_2^n$  derselben Halbebene bezüglich der Einschneidegeraden  $s' = P' P^n$  angehören und die kürzeste Drehung von  $\vec{s}_2'$  in  $\vec{s}'$  und die kürzeste Drehung von

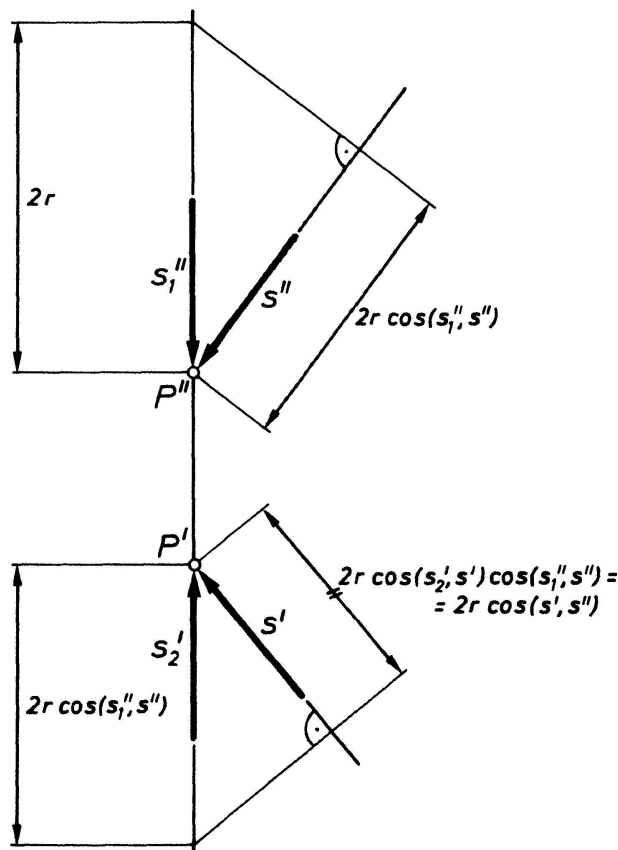
10) Ist das Objekt mit einem Koordinatensystem verknüpft, so ist das beim Einschneiden entstehende Bild ein normalaxonomischer Riss (vgl. [5]).



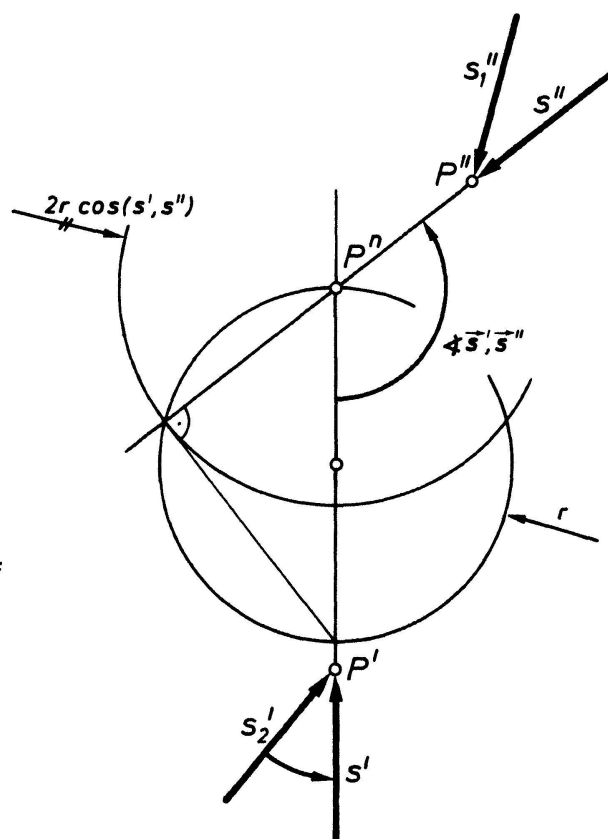
Für  $\sphericalangle \vec{s}_2', \vec{s}' = 90^\circ$  bzw.  $\sphericalangle \vec{s}_1'', \vec{s}'' = 90^\circ$  erhalten wir beim Einschneiden einen zum Einschneideaufriß bzw. Einschneidegrundriß gepaarten Normalriß, für  $\sphericalangle \vec{s}_2', \vec{s}' = \sphericalangle \vec{s}_1'', \vec{s}'' = 90^\circ$  speziell einen Kreuzriß, so dass (3) unter Ausschluss der Werte  $0^\circ$  und  $180^\circ$  für  $\sphericalangle \vec{s}_2', \vec{s}'$ ,  $\sphericalangle \vec{s}_1'', \vec{s}''$  und  $\sphericalangle \vec{s}', \vec{s}''$  uneingeschränkt gilt.

5. Die Anwendung unserer Überlegungen soll anhand der Figur 4 erläutert werden; dabei repräsentieren die Risse des Punktes  $P$ , durch den wir die Sehstrahlen  $\vec{s}_1, \vec{s}_2$  und  $\vec{s}$  gewählt haben, Grund- und Aufriss eines Objekts<sup>10</sup>.

Wir legen den Einschneidegrundriß so aufs Zeichenblatt, dass  $s'$  zum linken Blattrand parallel und zum oberen Blattrand hin orientiert ist<sup>11</sup>), und zeichnen zur graphischen Auswertung von (3) um einen beliebigen Punkt von  $s'$  einen Kreis von beliebigem Radius  $r$ : Wählen wir einen Schnittpunkt dieses Kreises mit  $s'$  als Normalriß  $P^n$  von  $P$ , so trifft die Einschneidegerade  $s''$  durch  $P^n$  den Kreis in einem weiteren Punkt, der von  $P^n$  den Abstand  $2r \cos(s', s'')$  hat; nach (2) gilt  $2r \cos(s', s'') = 2r \cos(s_2', s') \cos(s_1'', s'')$ , und dieser Abstand kann in den Angaberissen rasch ermittelt werden (vgl. Fig. 4 a). In Figur 4 ist die kürzeste Drehung, welche den



Figur 4a



Figur 4

11) Dadurch wird erreicht, dass im Einschneideergebnis die Risse von im Raum lotrechten, nach unten orientierten Geraden zum linken Blattrand parallel und zum unteren Blattrand hin orientiert sind.

orientierten Grundriss  $\vec{s}_2'$  von  $\vec{s}_2$  in den orientierten Grundriss  $\vec{s}'$  des Sehstrahls  $\vec{s}$  bringt, positiv, daher geht in der Einschneidesituation der orientierte Aufriss  $\vec{s}''$  aus  $\vec{s}'$  durch eine positive Drehung hervor; da weiters laut Angabe  $\angle \vec{s}_2', \vec{s}' < 90^\circ$  und  $\angle \vec{s}_1'', \vec{s}'' < 90^\circ$  gilt, ist das Mass  $\angle \vec{s}', \vec{s}''$  des Drehwinkels grösser als  $90^\circ$ . Mit dem orientierten Aufriss  $\vec{s}''$  von  $\vec{s}$  ist, bis auf Schiebungen parallel  $s''$ , die Lage des Einschneideaufnisses auf dem Zeichenblatt bestimmt.

W. Kickingger, TU Wien

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 H. Brauner und W. Kickingger: Baugeometrie I. Bauverlag, Wiesbaden, Berlin 1977.
- 2 H. Brauner: Darstellende Geometrie im Schulunterricht. Der Mathematikunterricht 27, Heft 3, 5-68 (1981).
- 3 L. Eckhart: Ein neues Schrägrissverfahren. Österreichs höhere Schule, Päd.-fachwiss. Beiblatt zum «Mittelschullehrer», 6. Jg., Oktober 1937.
- 4 L. Eckhart: Affine Abbildung und Axonometrie. S.-Ber. Akad. Wiss. Wien 146, 51-56 (1937).
- 5 W. Kickingger: Konstruktion von Normalrissen durch Einschneiden. Der Mathematikunterricht 28, Heft 2 (1982).
- 6 E.J. Nyström: Zur praktischen Axonometrie. Soc. scient. Fenn., Commentationes Physico-Mathem. XI 11, 1-25 (1942).
- 7 F. Reutter: Darstellende Geometrie, Bd. I. Verlag G. Braun, Karlsruhe 1961.
- 8 E. Stiefel: Lehrbuch der Darstellenden Geometrie. Verlag Birkhäuser, Basel 1947.
- 9 K. Strubecker: Vorlesungen über Darstellende Geometrie, 2. Aufl. Verlag Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen 1967.

© 1983 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/83/040081-06\$1.50 + 0.20/0

## On the successive remainders of the exponential series

In [3], Gautschi proved some results on the successive remainders of the exponential series and he made two conjectures.

The aim of this note is to complete Gautschi's results and to prove his second conjecture.

Let us recall that a sequence  $(a_n)$  is called totally monotone if,  $\forall n, k \geq 0$

$$(-1)^k \Delta^k a_n \geq 0$$

where  $\Delta$  is the forward difference operator:  $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ .

A characterization of totally monotone sequences is due to Markov who showed that a necessary and sufficient condition for  $(a_n)$  to be totally monotone is that

$$a_n = \int_0^1 t^n dg(t) \quad n=0, 1, \dots$$

where  $g$  is bounded and non decreasing in  $[0, 1]$ . We shall write  $(a_n) \in TM$ .